Sa valeur principale résidait dans l'introduction pionnière des méthodes géométriques en théorie des fonctions et des objets que nous connaissons maintenant sous les noms de surfaces de Riemann, applications conformes et techniques variationnelles. Mais, en plus, parmi les vingt-deux paragraphes de ce texte de quarante-trois pages (en format actuel) il y a une *Section 19*, toute courte, qui contient ce que l'on appelle (suivant D. Hilbert) « le problème de Riemann », une des pierres angulaires de la (future) théorie des opérateurs de Toeplitz. Dans cette Section 19, Riemann n'a utilisé presqu'aucune formule et il l'a résumée lui-même de la façon suivante, un peu abstraite :

« 19. Überschlag über die hinreichenden und notwendigen Bedingungen zur Bestimmung einer Funktion complexen Argumenten innerhalb eines gegebenen Grössengebiet ». [1]

Bernhard Riemann (1826–1866), mathématicien allemand, génie créateur dont les contributions continuent de fertiliser les mathématiques cent cinquante ans après sa disparition. Les idées de Riemann ont transformé l'analyse complexe, la géométrie et la théorie des nombres, en donnant aussi une impulsion forte à l'analyse harmonique réelle et à la physique mathématique. Trois des quatre œuvres les plus influentes de Riemann ont paru comme « textes de qualification » : sa thèse de doctorat (Göttingen, 1851, sous la direction de C. Gauss) contenant la théorie des « surfaces de Riemann » et des applications conformes ainsi que ce que l'on appelle « le Problème (aux frontières) de Riemann » (PR), son *Habilitationsschrift* (1853) consacrée aux séries trigonométriques (avec « l'intégrale de Riemann » comme outil) et le célèbre *Habilitationsvortrag* (conférence inaugurale d'habilitation, 1854) intitulé *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* et donnant le départ aux interactions profondes entre la géométrie et la physique, qui aboutirent à la relativité générale d'Einstein ; ces trois chefs-d'œuvre ont été publiés de façon posthume. Le quatrième travail est *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (1859) sur la distribution des nombres premiers, qui contient —entre autres sujets— la célèbre « hypothèse de Riemann » (HR) sur les zéros de la fonction ζ dans le plan complexe (cette publication était aussi « forcée », car Riemann était obligé de présenter un texte à l'Académie berlinoise comme nouveau membre correspondant). Ces travaux de Riemann sont devenus — et restent — absolument fondamentaux pour les mathématiques et la physique des XIX^e^, XX^e^ et XXI^e^ siècles. Un nombre astronomique de publications sont consacrées aux développements des idées et des résultats de Riemann. Pour une présentation destinée au grand

---

1. Une ébauche des conditions nécessaires et suffisantes pour la détermination d'une fonction de variable complexe à l'intérieur d'un domaine donné.

public, voir, par exemple, *B. Riemann 1826–1866, Turning point in the conception of mathematics*, par D. Laugwitz (Birkhäuser, 2008) ou bien *Riemann, Le géomètre de la nature* (Pour la Science, n° 12, 2002), ou encore *Riemann* de H. Freudenthal in *Complete Dictionary of Sci. Biographies*, 2008.

Le nom de Riemann est associé à presque une centaine de concepts importants, comme « géométrie de Riemann », « équations de Cauchy-Riemann », « surfaces de Riemann », « intégrale de Riemann », « théorème de l'application conforme de Riemann », « méthode (problème) de Riemann-Hilbert », « l'hypothèse de Riemann », « lemme de Riemann-Lebesgue », « sphère de Riemann », « théorème de Riemann-Roch », etc., etc. En particulier, comme cela est bien connu, la géométrie riemannienne a été déterminante dans la création de la relativité générale — et aussi dans l'inspiration d'un certain mathématicien Charles Dodgson (mieux connu sous son pseudonyme littéraire de Lewis Carrol ; voir dessin à côté) pour ses géniales « Aventures d'Alice au pays des merveilles » (1865) et « À travers le miroir » (1871).

Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.

Bernhard Riemann

[Aus dem dreizehnten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.]*

Plan der Untersuchung

Bekanntlich setzt die Geometrie sowohl den Begriff des Raumes, als die ersten Grundbegriffe für die Constructionen in Raume als etwas Gegebenes voraus. Sie giebt von ihnen nur Nominaldefinitionen, während die wesentlichen Bestimmungen in Form von Axiomen auftreten. Das Verhältniss dieser Voraussetzungen bleibt dabei in Dunkeln; man sieht weder ein, ob und in wie weit ihre Verbindung nothwendig, noch a priori, ob sie möglich ist.

Diese Dunkelheit wurde auch von *Euklid* bis auf *Legendre*, um den berühmtesten neueren Bearbeiter der Geometrie zu nennen, weder von den Mathematikern, noch von den Philosophen, welche sich damit beschäftigten, gehoben. Es hatte dies seinen Grund wohl darin, dass der allgemeine Begriff mehrfach ausgedehnter Grössen, unter welchem die Raumgrössen enthalten sind, ganz unbearbeitet blieb. Ich habe mir daher zunächst die Aufgabe gestellt, den Begriff einer mehrfach ausgedehnten Grösse aus allgemeinen Grössenbegriffen zu construiren. Es wird daraus hervorgehen, dass eine mehrfach ausgedehnte Grösse verschiedener Massverhältnisse fähig ist und der Raum also nur einen besonderen Fall einer dreifach ausgedehnten Grösse bildet. Hiervon aber ist eine nothwendige Folge, dass die Sätze der Geometrie sich nicht aus allgemeinen Grössenbegriffen ableiten lassen, sondern dass diejenigen Eigenschaften, durch welche sich der Raum von anderen denkbaren dreifach ausgedehnten Grössen unterscheidet, nur aus der Erfahrung

*Diese Abhandlung ist am 10. Juni 1854 von dem Verfasser bei dem zum Zweck seiner Habilitation veranstalteten Colloquium mit der philosophischen Facultät zu Göttingen vorgelesen worden. Hieraus erklärt sich die Form der Darstellung, in welcher die analytischen Untersuchungen nur angedeutet werden konnten; einige Ausführungen derselben findet man in der Beantwortung der Pariser Preisaufgabe nebst den Anmerkungen zu derselben.

La carrière de Riemann a été lente et difficile dès le début, à commencer même par le choix des mathématiques comme sujet de ses études : en arrivant en 1846 à l'Université de Göttingen (bien provinciale à l'époque), il fut contraint par son père de s'inscrire à la faculté de théologie et n'a pu changer pour les mathématiques qu'après la permission de ce dernier (1847). Là, Riemann a grandi dans le séminaire de Gauss/Weber où les mathématiques et la physique étaient intimement entrelacées. Ce n'est qu'en 1854 qu'il a donné ses premiers cours à Göttingen. En 1857, il a participé au concours pour un poste de professeur à l'École Polytechnique de Zurich, mais a échoué — vu déjà ses difficultés d'expression orale — face à son collègue et ami R. Dedekind (1831–1916). Riemann est devenu professeur titulaire à Göttingen aussi tard qu'en 1859 (après la mort de P. G. Dirichlet, 1805–1859), souffrant toujours d'un manque d'étudiants (son célèbre cours de 1856 sur les fonctions abéliennes était fréquenté par trois étudiants, dont Dedekind). Une détérioration de sa santé (tuberculose latente ?) l'a forcé fréquemment à chercher refuge en Italie (1862–1866), et selon un témoignage d'un de ses étudiants (mai 1861) Riemann était souvent « affaibli et fatigué » au point que, parfois, il « ne parvenait pas à démontrer les choses les plus simples ». Le niveau d'appréciation de ses résultats novateurs par ses collègues était aussi très bas : dans les années 1860, E. Betti (1823–1892), qui a chaleureusement accueilli Riemann en Italie, a signalé que « les travaux de Riemann sont pratiquement inconnus du monde scientifique » à cause de « la concision et l'obscurité du style de cet éminent géomètre » ; K. Weierstrass (1815–1897) a sous-estimé les résultats de la thèse de Riemann ; en Angleterre, il est resté « quasi inconnu », et « en France et en Italie ses travaux étaient étudiés, mais peu compris » (selon R. Tazzioli dans *Pour la Science*, n°12, 2002). Effectivement, son style mathématique n'était pas facile et a donné pas mal de prétextes aux reproches. Par exemple, notons l'énoncé de PR (ni explicité, ni lié au contexte, voir I-1.1, page 1, et IV-6, pages 203 et suivantes, pour des détails), et puis le célèbre article *Über die Anzahl...* (1859), « le plus génial et fécond », selon E. Landau (1877–1938), qui — selon D. Laugwitz — est écrit « ... de telle manière qu'il n'est pas facile de comprendre comment il est parvenu à sa solution ; on reconnaît bien, dans cette façon d'effacer ses traces, l'élève de Gauss ! ». Ces réactions des collègues ont contribué, bien sûr, à la dégradation de la santé de Riemann : encore en 1857, année prolifique pour lui, selon Dedekind, il était « hypocondriaque au plus haut point, méfiant envers les autres et envers lui-même », et puis en 1863 (toujours d'après Dedekind) il montrait déjà un « état triste » avec des tendances dépressives. Il est mort en voyage en Italie sur le Lac Majeur (1866), avant d'arriver sur ses quarante ans.

Riemann était marié avec Elise Koch (1862), et ils eurent une fille.

En fait, le n° 19 contient le tout premier énoncé d'un problème maintenant célèbre ; l'auteur ne l'a pas relié aux autres questions de la thèse et n'y a pas donné suite. En langage modernisé (surtout par D. Hilbert, voir I-1.3, page 10, ci-dessous), le problème est le suivant :

Étant donnés un domaine borné G dans le plan complexe $\mathbb{C}$ et des fonctions réelles a, b, c sur le bord ∂G, trouver une fonction holomorphe $f \in \mathrm{Hol}(G)$, avec $f = u + iv$ ($u = \mathrm{Re}\, f$, $v = \mathrm{Im}\, f$) telle que ses valeurs sur le bord ∂G satisfassent $au + bv = c$.

Riemann l'a vu comme une généralisation du *problème de Dirichlet* : trouver une fonction u satisfaisant $\Delta u = 0$ dans G (où $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ est le laplacien dans $\mathbb{R}^2$) et $u = c$ (une fonction donnée) sur ∂G. Une nouvelle écriture du problème de Riemann (et sa dénomination en tant que tel) a été introduite par D. Hilbert au XX$^{\mathrm{e}}$ siècle (1905) dans ses cours célèbres (Göttingen, 1901–1910) sur les équations intégrales (voir I-1.3, page 10, ci-dessous), et c'est exactement la forme sous laquelle nous allons le traiter/résoudre dans le chapitre IV. À ce stade, aucune matrice/opérateur de Toeplitz n'apparaît encore dans la question...

Il faut ajouter qu'avant l'intervention décisive de Hilbert, est paru un article de Vito Volterra [Volt1882] où le problème de Riemann était clairement énoncé et discuté, mais qui est passé quasi inaperçu. Le nom de Volterra apparaîtra encore une fois sur notre tracé de l'évolution historique de la théorie de Toeplitz (voir I-3.2, page 18, ci-dessous).

Vito Volterra (1860–1940), mathématicien italien, connu pour ses recherches en ÉDP, en analyse réelle, ainsi qu'en théorie des opérateurs intégraux (opérateurs de Volterra) et intégraux-différentiels, l'un de ceux qui ont pavé le pont entre les mathématiques des XIX^e et XX^e siècles. Également, Volterra est l'un des créateurs (avec Lotka, mais indépendamment) de la théorie mathématique (la dynamique et l'équilibre) des communautés d'espèces antagonistes (proie-prédateur), et en particulier, de « l'équation de Lotka-Volterra ». Sa théorie des « fonctions de lignes » (que J. Hadamard (1865–1963) a nommé « fonctionnelles »), qui date de 1887, a inauguré l'analyse fonctionnelle moderne. Vito Volterra a signé la toute première publication sur le Problème de Riemann (voir I-1.1, page 1), ainsi que deux cent trente-cinq autres articles de recherche. Il est l'auteur d'une demi-douzaine de monographies, y compris sur sa théorie de la lutte pour la vie [Volt1931].

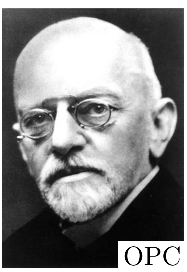
Volterra a suivi ses études à Pise, à l'Université et à la Scuola Normale Superiore, où il a soutenu sa thèse en 1882 (sous la direction d'Enrico Betti), puis il a fait une belle carrière de professeur et de titulaire de chaires à Pise, Turin et Rome (son travail à Turin a été perturbé par un notable conflit avec un autre grand mathématicien, Giuseppe Peano, connu pour son intolérance aux moindres faiblesses dans les arguments mathématiques d'autrui ainsi que pour son projet « Formulario Mathematico » (de coder toutes les mathématiques en symboles logiques et de les enseigner selon cette source...) qui ont exaspéré ses collègues). Volterra est le seul mathématicien invité quatre fois à donner une conférence plénière aux ICM (1900, 1908, 1920, 1928), il est devenu membre de plusieurs Académies (Royal Society (London, Edimbourg), Accademia dei Lincei, et autres) et a reçu diverses distinctions ; il a fondé plusieurs organisations de recherche italiennes (comme le Consiglio Nazionale delle Ricerche (1923) duquel Volterra a été le premier président). De nos jours, une dizaine d'objets mathématiques portent son nom.

La carrière de Volterra a été fortement perturbée par le passage de la période fasciste en Italie. Étant l'un des douze professeurs italiens (sur un total de 1250) qui ont refusé de prêter serment au Gouvernement fasciste en 1931, il a été limogé de son poste de professeur et expulsé de l'*Accademia dei Lincei* ; après le honteux « Manifesto della razza » (1938), Volterra (ainsi que ses deux fils qui avaient déjà des postes universitaires) a été expulsé en tant que Juif de l'*Instituto Lombardo di Scienze e Lettere*. Il est mort d'une phlébite dans sa maison à Rome.

Volterra était marié (1900), avec sa cousine Virginia Almagià, et a eu six enfants.

1.2. XX^{e} siècle : D. Hilbert

David Hilbert a joué un rôle multi-face dans le devenir des opérateurs de Toeplitz : il a effectué le premier vrai avancement du Problème de Riemann (*PR*, pour abréger), il a lancé le *Problème 21* (dont le *PR* représente la partie principale) dans sa célèbre liste en 1900 de vingt-trois problèmes non résolus pour le XX^{e} siècle, il a indiqué la technique principale pour la solution du *PR* (les opérateurs intégraux singuliers — *OIS*), et enfin (*last but not least !*) il a suggéré à O. Toeplitz de traiter des matrices/formes de Laurent (ce qui va mener aux opérateurs de Toeplitz...) en guise d'illustration de sa toute nouvelle théorie spectrale présentée dans ses cours de 1901–1910 sur les opérateurs intégraux.



OPC

David Hilbert (1862–1943), mathématicien allemand dont les œuvres et la personnalité ont exercé une influence décisive sur toutes les mathématiques du XX^{e} siècle. Ses apports à la théorie des nombres (à travers la théorie du corps de classes dans le célèbre *Zahlbericht*, « Rapport sur les nombres », (1897) écrit à la demande de la Société mathématique allemande), à l'axiomatisation de la géométrie, aux équations intégrales et à l'analyse fonctionnelle, à la physique mathématique, au calcul des variations et à la logique mathématique sont fondamentaux. Son discours au second Congrès International des Mathématiciens (Paris, 1900) contenant vingt-trois problèmes non résolus dans tous les domaines a déterminé le développement des mathématiques pour les décennies suivantes. Plusieurs disciplines ont été tout simplement créées sous la plume de Hilbert, comme la théorie de la démonstration et la métamathématique, ou bien la « théorie spectrale » (le titre donnée par Hilbert à sa théorie des opérateurs bornés autoadjoints, en ajoutant vingt-cinq ans après — comme commentaire à la physique quantique de Max Born, Werner Heisenberg et Erwin Schrödinger — « ... sans soupçonner qu'elle serait utile pour les vrais spectres de la physique »). Son cours fondateur sur les équations intégrales donné à l'Université de Göttingen 1901–1908 (publié d'abord par son étudiant Hermann Weyl en 1908, puis dans le livre de Hilbert en 1912) contient ce que l'on appelle aujourd'hui « les espaces de Hilbert », « la transformation de Hilbert », « l'inégalité de Hilbert », « le problème général de Riemann » (connu, après l'intervention de Hilbert, comme « problème de Riemann-Hilbert », voir §I-1.1, page 1, et chapitre IV ci-dessous).

H. Weyl (étudiant puis successeur de Hilbert à sa chaire, et lui aussi un maître de l'analyse du XX^{e} siècle) a donné un panorama et une analyse des œuvres de Hilbert en les divisant en cinq périodes, [Wey1944].

Hilbert a créé une « école de Göttingen », une communauté sans précédent dans l'histoire des mathématiques, avec soixante-neuf étudiants ayant soutenu une thèse sous sa direction, où figure une pléiade de personnages clés des mathématiques du XX^{e} siècle comme O. Blumenthal, F. Bernstein, S. Bernstein, R. Courant, A. Haar, E. Hecke, E. Hellinger, E. Schmidt, H. Steinhaus, H. Weyl, A. Hurwitz.

Plusieurs autres, sans avoir été formellement des thésards, ont passé de longs stages au séminaire de Hilbert à Göttingen, comme E. Noether, H. Bohr, M. Born (Prix Nobel 1954), E. Lasker (champion du monde d'échecs, 1894 et 1921), A. Church, J. von Neumann, O. Toeplitz, H. Weyl, E. Zermelo et des dizaines d'autres.

Plusieurs dizaines d'objets mathématiques portent de nom de Hilbert (ci-dessous quelques exemples) ; d'après C. Reid [Rei1970] « comme une sorte d'Alexandre de Macédoine des mathématiques, il a laissé son nom briller sur la carte de notre science ».

Toute la carrière de Hilbert s'est déroulée à Göttingen, à part une courte période à Königsberg (1892–1895, en tant que *Privatdozent*) où il s'est marié à Käthe Jarosch (d'une famille amie depuis longtemps) et a eu un enfant (Franz). Après des années de travail acharné et de triomphe, Hilbert est tombé gravement malade (1925 ; une anémie pernicieuse, à l'époque incurable) — on lui prédisait quelques semaines de vie (d'ailleurs, les premiers signes d'une faiblesse étaient apparus déjà en 1908). Hilbert a été miraculeusement sauvé grâce aux efforts de ses amis et collègues (R. Courant, O. Kellog, D. Birkhoff, et d'autres) qui ont organisé une vraie chaîne humaine pour faire venir de Harvard (à l'époque de la crise et de criants problèmes quotidiens !...) un nouveau médicament expérimental. Hilbert a pris sa retraite en 1930, l'année où ses efforts de longue date ont abouti finalement à l'ouverture du nouvel Institut de Mathématiques (photo). Il a continué de donner des cours (un par an), mais étant déjà très affaibli, il arrivait souvent qu'il perde le fil d'un raisonnement ou qu'il en oublie le but... Cet état de faiblesse explique sans doute le triste fait que l'on trouve sa signature sous une lettre collective de soutien à A. Hitler publiée avant le référendum de 1934 (lui qui était déjà si blessé par l'épuration ethnique qui avait laissé son Institut exsangue...).

La vie de Hilbert a donné naissance à une sorte de mythologie. Sa réaction à une nouvelle monnaie allemande en 1923 (pour sortir de l'inflation galopante) fut : « Impossible de résoudre un problème en changeant le nom d'une variable indépendante ». Son premier article sur les invariants (contenant entre autres le célèbre *Nullstellensatz*) a été refusé par P. Gordan, expert auprès des *Mathematischen Annalen*, qui a dit de sa preuve de (pure) existence d'un nombre fini de générateurs *« Das ist nicht Mathematik. Das ist Theologie »*. Le credo de Hilbert lui-même était « Une formulation adéquate du problème est déjà une moitié de la solution » (d'après C. Reid [Rei1970]) et puis le fameux *« Wir müssen wissen, wir werden wissen »*[2] à la fin de son discours public à Königsberg (1930), juste la veille (!) de l'annonce par K. Gödel de son théorème d'incomplétude de l'axiomatique de Zermelo-Fraenkel... (la phrase elle-même semble être une allusion à un slogan mémorable de Allemands *« Wir müssen siegen, und wir werden siegen »*[3] utilisé (en particulier) par le Kaiser Wilhelm II (Guillaume II) en août 1914, puis par la propagande de guerre sur des milliers de cartes postales, de médailles, dans les chansons de guerre, etc., et qui provenait probablement de la *Zwinger saga 1517–1524*, un texte médiéval sur le siège de la ville impériale de Goslar (en Basse-Saxe) ; les Allemands n'ont pas été les seuls — souvenez-vous de *« Venceremos... »*, etc.).

2. « Nous devons savoir, et nous saurons ».
3. « Nous devons gagner, et nous gagnerons ».

Dans ces cours, publiés d'abord dans *Nachrichten der Köningliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* entre 1904 et 1910 (en commençant par [Hi1904]), et puis sous forme de livre [Hi1912], Hilbert a généralisé le *PR* et lui a donné une formulation en terme d'opérateur intégral singulier (*OIS*). En particulier, en utilisant le théorème d'application conforme de Riemann (démontré dans sa thèse *Inauguraldissertation* citée auparavant, à un petit point vague près sur l'applicabilité du « principe de Dirichlet »...), la question de Riemann énoncée dans I-1.1 se réduit (si G est simplement connexe) à $G = \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ et, comme $u = (f + \overline{f})/2$, $v = (f - \overline{f})/2i$, et $\overline{f}|\partial\mathbb{D}$ est la valeur au bord d'une fonction $f_-(z) = \overline{f}(1/\overline{z})$ holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, on peut reformuler le problème sous la forme suivante :

Étant données des fonctions A, B, C sur le cercle $\partial\mathbb{D}=\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$, trouver deux fonctions holomorphes $f_+ \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ et $f_- \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}})$ telles que leurs valeurs au bord satisfassent

$$Af_+ + Bf_- = C$$

sur $\mathbb{T}$ (et $f_-(\infty) = 0$).

Sous l'hypothèse que A ne s'annule pas sur $\mathbb{T}$ (et sous des conditions un peu vagues sur la régularité de A, B, C (il semble qu'il s'agisse de $A, B, C \in C^2$), Hilbert a réduit la question à une équation intégrale singulière (en identifiant, en fait, $f_\pm$ avec des projections $P_\pm F$ d'une fonction sur $\mathbb{T}$, voir le chapitre IV pour les détails) qui appartenait à une famille d'équations déjà étudiées (dans le même cours)

$$a(s)\varphi(s) + \int_{[-\pi,\pi]} K(s,t)\varphi(t)\,dt = \psi(s),$$

où K est un noyau holomorphe en dehors de la diagonale $s = t$, sur laquelle il a un pôle simple, et peut s'écrire sous la forme

$$K(s,t) = b(s)\operatorname{cotan}\frac{s-t}{2} + N(s,t),$$

avec $N \in L^2([-\pi,\pi]^2)$ (voir le chapitre IV pour les détails). Hilbert en a déduit que pour $n = \mathrm{wind}(B/A) = 0$ (« winding number » — l'indice de Cauchy de la courbe $B/A(\mathbb{T})$, voir III-1.2, page 94) une solution existe et est unique ; pour $n \neq 0$, il faut imposer $|n|$ conditions supplémentaires ($n < 0$), ou bien déceler n solutions indépendantes ($n > 0$) — une conclusion qui anticipe sur le concept d'indice d'un opérateur (introduit par F. Noether en 1921 seulement, voir l'annexe E). Finalement, cette technique a mené à une solution complète du *PR*, présentée dans le chapitre IV.

Dans le même livre [Hi1912], Chapitre X, Hilbert a appliqué les résultats sur le *PR* au *problème des groupes de monodromie* des équations différentielles ordinaires (*ÉDO*) linéaires, aussi proposé par Riemann. Initialement, le problème concerne des *ÉDO* d'ordre n dans le plan complexe $\mathbb{C}$; par un changement de notations, une telle équation peut être réduite à un système de n équations de premier ordre, c'est-à-dire

$$dy(z)/dz = A(z)y(z),$$

où $y = (y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm{col}}$ et A est une fonction à valeurs matricielles $n\times n$. Le système est dit *fuchsien* (d'après L. I. Fuchs, mathématicien allemand, 1833–1902) si A est holomorphe dans $\mathbb{C}$ privé d'un ensemble fini de points z_j où elle a des pôles simples. Les pôles de A provoquent d'éventuels branchements (logarithmiques) de y le long d'un prolongement analytique sur une courbe fermée donnée $\gamma : [0,1] \to \Omega$ dans $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z_j\}$, ce qui entraîne l'égalité $y \circ \gamma(1) = C\big(y \circ \gamma(0)\big)$ où $C = C_\gamma$ est une matrice inversible à éléments constants. Il est clair que si $\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2$ est un chemin composé, on a $C_\gamma = C_{\gamma_1} C_{\gamma_2}$; l'image $\gamma \mapsto C_\gamma$ du groupe fondamental de Ω dans le groupe des matrices inversibles $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, s'appelle le *groupe de monodromie* de l'équation. Le *Problème 21* de la célèbre liste des problèmes de Hilbert (1900) s'interroge sur le fait qu'un groupe arbitraire de matrices $n\times n$ puisse être le groupe de monodromie d'un certain système fuchsien.

Hilbert a montré [Hi1912] comment, pour $n = 2$, on peut réduire le problème de monodromie à un problème de Riemann vectoriel $f_- = af_+$ (avec $f_\pm = (f_\pm^1, f_\pm^2)^{\mathrm{col}}$, a une matrice 2×2 constante, $\det(a) \neq 0$), puis résolu ce *PR*. (Dans la littérature des ingénieurs anglophones on appelle souvent cette écriture de *PR* « barrier problem »). L'appréciation et le traitement du *PR* par Hilbert (à l'aide des *OIS*), ainsi que ses liens avec le problème des groupes de monodromie, ont attiré sur le *PR* une forte attention et fait apparaître des techniques puissantes ayant un spectre énorme d'applications, voir III-5, pages 142 et suivantes, ainsi que IV-6, pages 203 et suivantes, pour une description d'une partie de ces recherches. Impressionné par cette approche, É. Picard [Pic1927] l'a surnommée « problème de Hilbert », mais, finalement, c'est le nom de « problème de Riemann-Hilbert » (*PRH*) qui a survécu (par la suite, nous utiliserons ce nom).

Actuellement, avec d'autres applications importantes du *PRH*, on le regarde comme la *première des quatre « pierres angulaires »* de la théorie des opérateurs de Toeplitz (voir le *scénario* de ce chapitre), parce que — par l'intermédiaire des *OIS* et avec une participation des *OWH* (opérateurs de Wiener-Hopf, voir I-3.2, page 18) — il a donné naissance à une profonde théorie spectrale des opérateurs de Toeplitz (présentée au chapitre III). De plus, nous montrerons dans le chapitre IV que la théorie des *PRH normalement résolubles* (au sens de Hausdorff, voir annexe E) est tout simplement une *forme équivalente* de la théorie spectrale des opérateurs de Toeplitz, un fait qui tarda à être complètement reconnu (voir les remarques du §I-4, pages 21 et suivantes, ainsi que les commentaires et références au IV-6, pages 203 et suivantes).

Quant au *Problème 21* des groupes de monodromie (qui reste très lié au *PRH* et surtout à la méthode de factorisation de Birkhoff, voir I-1.3, page 10), durant le XX^e siècle, il a subi une longue et riche évolution. Le ton fut donné par D. Hilbert qui, selon son propre témoignage (dans une note de bas de page après le Théorème 32 (Ch.X) de [Hi1912]), avait déjà décrit l'approche au *PR* à l'aide des *OIS* dans son cours du semestre d'hiver 1901/1902. Puis, l'idée fut réalisée dans des cadres différents par O. Kellog, L. Schlesinger, J. Plemelj [Ple1908b] (« ... qui a exposé une version simplifiée de ma solution d'un cas spécial du *PR* », selon Hilbert, *loc.cit.*). Cette dernière publication contient une solution du « Problème 21 au sens large » (c'est-à-dire, si on accepte de réaliser un groupe de monodromie sur n'importe quelle *ÉDO* dont les solutions ont une croissance au plus polynomiale aux points singuliers), et pendant une longue période on a estimé qu'elle contient aussi une solution du « Problème 21 au sens strict » (donc, comme il est énoncé par Hilbert, en admettant des équations fuchsiennes uniquement). Cette interprétation a été même montée au niveau des faisceaux vectoriels holomorphes (H. Röhrl, 1957). Néanmoins, il a été découvert dans les années 1980 qu'il y a des lacunes dans les arguments de [Ple1908b] — la preuve pour les ÉDO fuchsiennes passe uniquement dans le cas où il y a au moins un point singulier où la matrice de monodromie est diagonalisable (A. Kohn Treibich (1983) ; V. Arnold et Yu. Ilyashenko (1985)). La même remarque s'adresse au résultat de G. Birkhoff [Bir1909, Bir1913], qui a utilisé sa méthode de factorisation (voir, ci-dessous, I-1.3). En contraste avec certains cas où le problème a été réglé (cas des matrices de monodromie dans un voisinage de l'identité, ou bien cas $n = 2$ (avec un nombre arbitraire de singularités)), A. Bolibruch a obtenu en 1989 une réponse négative inattendue au Problème 21, en donnant un contre-exemple pour $n = 3$ et quatre points singuliers. Puis, il a trouvé (parfois avec des co-auteurs) des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un groupe soit réalisable comme groupe de monodromie d'un système fuchsien. La littérature autour du Problème 21 est immense : voir [AnB1994, Its2003], ainsi que des commentaires de A. Bolibruch aux p. 591–593 de [Hi1998].

1.3. G. Birkhoff et H. Poincaré

George D. Birkhoff (1884–1944) et *Henri Poincaré* (1854–1912) ont participé aux fondements de la théorie de Toeplitz, tout à fait indépendamment et de façon différente : G. Birkhoff en préparant la technique la plus importante, dite « factorisation de Birkhoff » (ou de « Birkhoff-Wiener-Hopf ») [Bir1909], [Bir1913], et H. Poincaré en généralisant le problème de Riemann-Hilbert et en introduisant des éléments du calcul fonctionnel des *OIS*, [Poi1910a].

George Birkhoff (voir l'encadré page 157) a travaillé sur une classification des singularités des *ÉDO* et sur le problème des groupes de monodromie, mais ses techniques et résultats sur la factorisation des fonctions (à valeurs scalaires et matricielles) $f = f_- d f_+$ (voir [Bir1909], [Bir1913]) ont largement dépassé les limites de leur usage initial et sont devenus des outils indispensables pour un grand nombre de disciplines. Tout d'abord, cette remarque concerne la théorie spectrale des opérateurs de Toeplitz (et du *PRH*, et des *OIS*) : par exemple, l'inversibilité d'un opérateur de Toeplitz T_φ est assurée si $\varphi = \varphi_- \varphi_+$ avec $\varphi_\pm$ inversibles, et on a $T_\varphi^{-1} = T_{1/\varphi_+} T_{1/\varphi_-}$. Comme il s'agit d'une question un peu technique, nous renvoyons à son traitement détaillé aux chapitres III et IV, et aux commentaires III-5, pages 142 et suivantes, et IV-6, pages 203 et suivantes.

Henri Poincaré (1854–1912), mathématicien français (ainsi que physicien, philosophe, ingénieur), l'un des deux derniers mathématiciens universels (avec D. Hilbert), dont les travaux d'importance majeure ont beaucoup influencé le paysage des mathématiques à l'aube du XX$^{\text{e}}$ siècle. Poincaré a travaillé sur le problème des trois corps, fondé la théorie qualitative des systèmes d'équations différentielles et la théorie du chaos, donnant le coup de départ à la théorie moderne des systèmes dynamiques. Plusieurs idées de Poincaré ont défini le développement de ces sujets pour les décennies suivantes (comme l'étude des cycles limites et des bifurcations). En physique, Poincaré est le précurseur majeur de la relativité restreinte : entre autres interventions, en 1905 il a publié deux articles sur les transformations de H. Lorentz (contenant tous les éléments mathématiques de la théorie), l'un avant et l'autre après la note d'Albert Einstein donnant sa forme physique finale au sujet. Ses résultats en physique ont été largement reconnus, en particulier par une invitation au fameux 1$^{\text{er}}$ Congrès (Conseil) Solvay à Bruxelles (1911) où il a rencontré H. Lorentz, A. Einstein, M. Plank, E. Rutherford, et d'autres acteurs principaux de la révolution relativité/quanta. Poincaré n'a jamais revendiqué la priorité sur la relativité (comme l'ont fait pour lui nombre de ses partisans, y compris des jusqu'au-boutistes comme E. Whittaker (1873–1956) qui attribuait tout à H. Lorentz et H. Poincaré) ni jamais mentionné les publications d'Einstein. En revanche, il a beaucoup polémiqué avec des obscurantistes sur les nouvelles idées, par exemple dans « La Terre tourne-t-elle ? » (Bull. Soc. Astron. France, 18 (1904), 216–217) sur la question de l'éther (gravitationnel).

En mathématiques pures, Poincaré a construit la théorie des fonctions automorphes (invariantes par rapport à un groupe de transformations) pour résoudre les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques, fondé la topologie algébrique (« Analysis situs », 1895) —la célèbre « conjecture de Poincaré » (1904) est devenue cent ans plus tard le théorème de G. Perelman (2003–2006) — et la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. Son travail sur les fonctions automorphes (fuchiennes, comme il les nommait) a été marqué par une fameuse « rivalité amicale » (et dramatique) entre Poincaré et un grand mathématicien allemand, Felix Klein, qui par coïncidence travaillait en parallèle sur le même sujet (1881–1882) : Klein a commencé une correspondance intense avec Poincaré en quête de l'énoncé du « grand théorème d'uniformisation », mais c'est Poincaré qui a réussi à le trouver le premier ; quant à Klein, sa santé n'a pas supporté cette compétition sous un stress si fiévreux et prolongé, et il fut atteint par une grave dépression (1882) qui a perturbé sa vie et sa carrière. Il semble que l'esprit de Poincaré ait été aussi marqué par ce travail intense, car ce sont ses travaux sur les fonctions automorphes qu'il a choisis beaucoup plus tard comme exemple dans ses célèbres essais sur la nature psychologique des découvertes mathématiques : « ...⟨après de longs efforts infructueux⟩ je quittai Caen, où j'habitais alors... Les péripéties du voyage me firent oublier mes travaux mathématiques ; arrivés à Coutances, nous montâmes dans un omnibus pour je ne sais plus quelle promenade ; au moment où je mettais le pied sur le marche-pied, l'idée me vint, sans que rien dans mes pensées antérieures parût m'y avoir préparé, que les transformations dont j'avais fait usage pour définir les fonctions fuchsiennes étaient identiques à celles de la géométrie non euclidienne. ⟨...⟩ De retour à Caen, je vérifiai le résultat à tête reposée pour l'acquit de ma conscience. », [Poi1908]. Il convient d'ajouter que beaucoup plus tard, la théorie des fonctions automorphes est devenue une base pour l'important « Programme de R. Langlands » (1967) reliant l'analyse harmonique et la théorie des nombres. En fait, pour énumérer les domaines où Poincaré a pesé de façon considérable ou décisive, il faudrait tout simplement faire la liste de toute la nomenclature des mathématiques (et d'une bonne part de la physique et de l'astronomie) du début du XX^{e} siècle. (Même sur les fondements des mathématiques, selon J. Dieudonné [Die1975], Poincaré a précédé K. Gödel et son célèbre théorème d'incomplétude.) Au total, la liste des publications de Poincaré contient plus de six cents références, dont des monographies fondamentales : *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (en trois volumes publiés entre 1892 et 1899) et *Leçons de mécanique céleste* (1905), plusieurs essais de philosophie et de vulgarisation.

Des dizaines d'objets mathématiques portent le nom de Poincaré. Il a reçu plusieurs prix scientifiques (à commencer par le prestigieux Prix du roi de Suède Oscar II en 1887 pour le problème des trois corps) et autres distinctions (par exemple, il était membre de plus de trente académies). Sa personnalité et sa vision de la nature et de la science ont fait l'objet d'études de mathématiciens (G. Darboux le définit comme un intuitif), de psychologues (E. Toulouse (1910), qui note que la plupart des mathématiciens travaillent à partir de principes déjà établis, tandis que Poincaré commence toujours par une révision des principes de base), d'historiens des sciences (P. Boutroux, d'ailleurs neveu de Poincaré, écrit dans une lettre à Mittag-Leffler en 1913 : « habitué à négliger les détails et à ne regarder que les cimes, il passait de l'une à l'autre avec une promptitude surprenante... »), de biographes (A. Belliver, 1956), et de lui-même : « Le savant n'étudie pas la nature parce que cela est utile ; il l'étudie parce que ⟨...⟩ elle est belle. Si la nature n'était pas belle, elle ne vaudrait pas la peine d'être connue, la vie ne vaudrait pas la peine d'être vécue », et « Comment se fait-il qu'il y ait des gens qui ne comprennent pas les mathématiques ? Si les mathématiques n'invoquent que les règles de la logique ⟨...⟩ Et il y a plus : comment l'erreur est-elle possible en mathématiques ? », [Poi1908].

Poincaré provient d'une famille intellectuelle d'influence (son père était le doyen de la faculté de médecine de Nancy, et son cousin germain le futur président de la République Raymond Poincaré (1913–1920 ; surnommé « Poincaré-la-guerre » après la Grande Guerre, puis Président du Conseil des ministres 1922–1924, 1926–1929)). À l'âge de cinq ans Poincaré est malade de la diphtérie et reste paralysé durant cinq mois. Malgré son inaptitude sportive et artistique et une épreuve de géométrie descriptive ratée, il fut classé premier au concours d'entrée à l'École Polytechnique (1873–1875) ; puis, il est passé à l'École des Mines dont il est sorti (3e sur trois) comme ingénieur de troisième classe à Vesoul (1879). Poincaré a soutenu sa thèse à la Sorbonne en 1879 (sous la direction de Ch. Hermite) et est devenu chargé de cours à la faculté des sciences de Caen.

À partir de 1881, il a occupé différents postes à la Sorbonne et à l'École Polytechnique ; élu à l'Académie des Sciences en 1887 (le seul cas d'élu à la fois aux cinq sections de l'Académie de l'époque — géométrie, mécanique, physique, géographie, et navigation ; devenu Président en 1906) et à l'Académie française en 1908, ainsi qu'au Bureau des longitudes (1893). Dans l'affaire du capitaine Alfred Dreyfus, qui a bouleversé la France en 1894-1906 (avec de nombreuses répercussions bien après), Poincaré a joué un certain rôle, en adressant une lettre au 2$^{\mathrm{d}}$ procès de Rennes critiquant l'analyse « scientifique » du bordereau (analyse qui « accusait » Dreyfus), puis — à la demande de la Cour de Cassation de 1904 — en rédigeant un rapport (signé avec G. Darboux et P. Appell) sur les erreurs mathématiques de cette analyse.

Poincaré était marié à Louise Poulain d'Andecy (1881), arrière-petite-fille d'Étienne Geoffroy Saint-Hilaire (1772–1844), zoologiste et membre de l'Académie des Sciences ; ils ont eu quatre enfants.

Une immense littérature est consacrée à l'héritage scientifique de Poincaré, ainsi qu'aux descriptions de sa vie, son évolution et son entourage. Citons J. Dieudonné [Die1975] et F. Verhulst [Verh2012] ; la liste des références pour une biographie de Poincaré dans le site WEB de l'Université St. Andrews [4] contient cent sources bio-bibliographiques (parmi les auteurs P. Aleksandrov, P. Appell, A. Borel, É. Borel, E. Bell, M. Brelot, F. Browder, T. Dantzig, G. Darboux, P. Dugac, J. Gray, P. Griffits, J. Hadamard, G. Valiron, et autres).

H. Poincaré, dans sa théorie mathématique des marées, a abordé un problème semblable à celui de Riemann-Hilbert ; il s'agit de déterminer une fonction harmonique u ($\Delta u = 0$ dans un domaine G) satisfaisant une condition à la frontière ∂G

$$a(s)\frac{\partial u}{\partial n} + b(s)\frac{\partial u}{\partial s} + c(s)u = d(s),$$

où a, b, c, d sont des fonctions données et $\partial u/\partial n$, $\partial u/\partial s$ les dérivées normale et tangentielle de u à la frontière. Il a ramené la question à une *EIS*, et pour sa solution a introduit une sorte de calcul fonctionnel incluant une formule importante, dite de Poincaré-Bertrand (voir IV-6, pages 203 et suivantes), qui a joué un rôle stimulant dans la découverte du calcul symbolique (de S. Mikhlin et d'autres ; voir III-5, pages 142 et suivantes, et IV-6, pages 203 et suivantes, pour une discussion et des références).

2. L'émergence du sujet : O. Toeplitz

Les légendes relient l'apparition de la théorie des *opérateurs de Toeplitz* à un article d'*Otto Toeplitz* de 1911 et celle des matrices de Hankel aux travaux de *Hermann Hankel* dans les années 1860. En fait, ni la première, ni la seconde de ces attributions ne résiste à un examen attentif : O. Toeplitz ne

4. http ://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Poincare.html