Mathématiques en devenir

101. — Jacques Faraut. *Analyse sur les groupes de Lie. Une introduction*
102. — Patrice Tauvel. *Corps commutatifs et théorie de Galois*
103. — Jean Saint Raymond. *Topologie, calcul diff. et variable complexe*
104. — Clément de Seguins Pazzis. *Invitation aux formes quadratiques*
105. — Bruno Ingrao. *Coniques projectives, affines et métriques*
106. — Wolfgang Bertram. *Calcul différentiel topologique élémentaire*
107. — Henri Lombardi & Claude Quitté. *Algèbre commutative. Méthodes constructives. Modules projectifs de type fini*
108. — Frédéric Testard. *Analyse mathématique. La maîtrise de l'implicite*
109. — Grégory Berhuy. *Modules : théorie, pratique... et un peu d'arithmétique*
110. — Bernard Candelpergher. *Théorie des probabilités. Une introduction élémentaire (Nouveau tirage bonifié)*
111. — Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome premier*
112. — Gema-Maria Díaz-Toca, Henri Lombardi & Claude Quitté. *Modules sur les anneaux commutatifs*
113. — Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome second* – encores
114. — Alain Debreil. *Groupes finis et treillis de leurs sous-groupes*
115. — François Rouvière. *Initiation à la géométrie de Riemann*
116. — Nikolaï Nikolski. *Matrices et opérateurs de Toeplitz*
117. — Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome premier (Nouveau tirage)*
118. — Martine et Hervé Queffélec. *Analyse complexe et applications*
119. — Alain Debreil, Jean-Denis Eiden, Rached Mneimné et Tuong-Huy NGuyen. *Formes quadratiques et géométrie*
120. — Christian Leruste.*Topologie algébrique–Une introduction, et au-delà*
121. — Grégory Berhuy. *Algèbre : le grand combat*
122. — Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome second*
123. — Jacques Faraut. *Analyse sur les groupes de Lie, une introduction.* Nouvelle édition revue et augmentée
124. — Charles-Michel Marle. *Géométrie symplectique et géométrie de Poisson*
125. — Pascal Boyer. *Petit compagnon des nombres et de leurs applications*
126. — Laurent Le Floch, Frédéric Testard. *Probabilités 1 – Le hasard* est *la nécessité*

Laurent Le Floch & Frédéric Testard

Probabilités 1

Le hasard *est* la nécessité

Calvage & Mounet

Géomètre de formation, Laurent LE FLOCH est maître de conférences à l'université de La Rochelle. Il a partagé une grande partie des enseignements de probabilités de la licence de mathématiques de La Rochelle avec Frédéric TESTARD de 2010 à 2018. laurent.lefloch@univ-lr.fr

Frédéric TESTARD (1961-2018) a été coauteur avec R. Mneimné de la célèbre « Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques », avec L. Salem et C. Salem du grand de succès de librairie « Les plus belles formules mathématiques »(traduit en finnois, anglais, japonais, chinois et arabe) et auteur de « Analyse mathématique – La maîtrise de l'implicite ».

Mathematics Subject Classification (1991) – Primary :

05-01 Combinatorics (Instructional exposition)
28-01 Measure and Integration (Instructional exposition)
28-A05 Measurable sets
28-A25 Integration with respect to measures
28-A35 Measures and integrals in product spaces
60-01 Probability Theory and Stochastic Processes (Instructional exposition)
60-A05 Foundations of probability theory (General questions)
60-A10 Foundations of probability theory (Probabilistic measure theory)
60-B10 Foundations of probability theory (Convergence of probability measures)
60-E05 Distribution theory (General theory)
60-E05 Distribution theory (Characteristic functions)
60-F05 Central limit and other weak theorems
60-F15 Strong theorems
60-G05 Foundations of stochastic processes
60-G42 Martingales with discrete parameter
60-G42 Sums of independent random variables ; random walks

ISBN 978-2-9163-5273-2

9 782916 352732

∞ Imprimé sur papier permanent

À Sylvie, Marie et Paul
À Dominique

Avant-propos

Le hasard est le plus grand romancier du monde ;
pour être fécond, il n'y a qu'à l'étudier.
Honoré de Balzac

Ce livre est destiné aux élèves de lycée (pour une partie du premier tome), aux étudiants de licence ou de master de mathématiques (en particulier les candidats aux concours du CAPES ou de l'agrégation), aux élèves de CPGE, aux enseignants en mathématiques et plus généralement à toute personne intéressée par la théorie des probabilités. Le premier tome de ce livre correspond à l'approche « élémentaire » des probabilités telle qu'elle est classiquement enseignée jusqu'en deuxième année de licence de mathématiques. Le deuxième tome correspond à l'approche moderne des probabilités, initiée par Andreï Kolmogorov, qui s'appuie sur la théorie de la mesure.

Dans les discussions qui ont précédé l'écriture du livre, avant même de définir précisément son contenu, nous avions retenu trois grands principes :

• une approche spiralée dans la présentation des différents concepts probabilistes (variables aléatoires, indépendance, conditionnement) : ces concepts reviennent régulièrement dans des cadres différents (discret fini, discret infini, continu, abstrait) ;
• des énoncés d'exercices volontairement très détaillés. Ils permettent au lecteur d'approfondir sa compréhension des notions rencontrées. Les très nombreux exercices (plus de 700 au total) font partie intégrante du livre ;
• un recours important à l'outil informatique. Nous avons fait le choix d'utiliser principalement le langage python et plus occasionnellement le tableur. L'outil informatique est un outil incontournable pour la simulation d'expériences aléatoires. Il nous faut cependant signaler qu'il ne s'agit pas d'un livre d'algorithmique. Nous avons en particulier systématiquement privilégié l'aspect « naturel » des programmes au détriment parfois de leur « efficacité ».

Les cinq premières parties du livre correspondent à l'approche spiralée évoquée précédemment. Ces parties correspondent à la nécessité d'introduire des modèles mathématiques de plus en plus sophistiqués pour résoudre des

problèmes eux-mêmes de plus en plus complexes (souvent motivés par la solution de problèmes plus simples traités auparavant). Les derniers chapitres (en général les deux derniers) de chacune de ces parties constituent un petit *vade-mecum* d'outils nécessaires à la description ou l'étude de ces modèles.
La notion de modèle mathématique associé à une expérience aléatoire joue un rôle important dans les premières années d'apprentissage des probabilités. Dans la théorie mathématique des probabilités, la modélisation consiste initialement à construire un ensemble Ω, appelé l'*univers probabiliste* et contenant tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire, et à le munir d'une probabilité P, qui associe à certaines parties de Ω appelées *événements* leur probabilité, en respectant un certain nombre de règles d'additivité. Quand l'ensemble Ω est fini (comme c'était, voilà quelques années, systématiquement le cas au lycée), il est naturel de munir toutes les parties de Ω d'une probabilité. Dans ce contexte, les parties à un élément sont appelées *événements élémentaires*, et l'*équiprobabilité* correspond au cas où tous les événements élémentaires ont la même probabilité. On calcule alors les probabilités en dénombrant cas favorables et cas possibles. Dans ce cadre (développé dans les parties 1 et 2 du livre), la théorie des probabilités s'identifie très fortement à l'analyse combinatoire.
Lorsque l'ensemble Ω est infini mais dénombrable (par exemple $\mathbb{N}$), on peut encore en général calculer la probabilité de toutes les parties de Ω, mais il est impossible cette fois qu'il y ait équiprobabilité. Ce cadre est développé dans la troisième partie du livre.
Dans le cas (très fréquent en pratique) où $\Omega = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^n$), des « obstructions technique » liées à la *théorie de la mesure* font que l'on ne peut pas en général calculer la probabilité de toutes les parties de Ω. On se limite à calculer les probabilités de certaines parties (notamment les intervalles dans le cas réel, ou les « pavés » - produits cartésiens d'intervalles - dans le cas multidimensionnel). Ce sont ces parties que l'on appelle alors des événements, et l'ensemble de tous les événements, que nous noterons $\mathcal{T}$ est appelé une *tribu*, ou une *σ-algèbre*. La probabilité est alors une *mesure* P, définie sur $\mathcal{T}$, et de « masse totale » égale à 1. Le vocabulaire employé ici est celui de la théorie de la mesure. Le cas des variables à densité est developpé dans la quatrième partie du livre (la dernière du premier tome). Le cadre le plus général constitue la cinquième partie du livre (la première du deuxième tome). Nous indiquons ci-dessous les problèmes que peut poser le choix de Ω, dans les divers cadres mentionnés ci-dessus.
Dans l'approche classique, on choisit un univers Ω lié aux observations d'une expérience aléatoire. Cette approche soulève quelques difficultés :

- Elle pose un problème lié à la subjectivité de l'observateur. Le choix de Ω peut dépendre du choix de l'observateur, de sa plus ou moins grande

naïveté, mais aussi du choix des observations qu'il souhaite réaliser. Dans ce cadre, on peut concevoir que, à partir d'un même modèle expérimental, un changement de questionnement amène à modifier le choix de Ω.
• Elle pose un problème lié à « l'instabilité » éventuelle de Ω. Si l'expérience consiste en une suite de jeux non bornée d'avance (par exemple, on joue à pile ou face jusqu'au moment où on obtient dix piles consécutifs), la description de certains événements peut nécessiter que l'on « change de Ω à chaque étape », sauf si on se résout à introduire un univers Ω infini tenant compte de l'ensemble de l'expérience (et de sa durée potentiellement infinie), mais ceci pose – au minimum – d'autres problèmes, techniques en particulier.
Dans l'approche moderne (qui s'appuie sur la théorie de la mesure), l'univers Ω est un ensemble abstrait, en général inconnu (sinon par son nom). Une variable aléatoire X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ (par exemple), mais la variable ω n'est en général pas nommée, et l'écriture $P(X \in [0,1])$ représente la mesure de l'ensemble des éléments ω de Ω tels que $X(\omega)$ appartienne à $[0,1]$. Dans cette approche, on ne cesse de raisonner sur des parties de Ω, de leur appliquer le langage ensembliste, sans jamais référer à ces parties comme à des ensembles mais en les décrivant souvent par un discours non formalisé et événementiel.
Cette situation est unique dans le cadre du travail mathématique : c'est à peu près le seul cas où la variable dont dépendent les fonctions n'a aucune importance (d'où le fait qu'elle ne soit pas nommée en général), ceci alors même que les fonctions subissent la plupart des traitements de l'analyse classique, comme notamment les estimations d'intégrales qui permettent d'obtenir espérance et variance.
Ce changement de statut de l'ensemble Ω est à l'origine de nombreuses difficultés d'apprentissage. Certaines situations permettent une approche mixte : du type théorie de la mesure avec un univers Ω explicite permettant de tout calculer. Cette approche, d'un certain point de vue fondamentale si on veut se convaincre que les objets dont parle l'approche moderne ont effectivement une existence mathématique (comme l'existence d'un modèle pour le jeu de pile ou face infini par exemple), est néanmoins peu utilisée en pratique. Elle conduit en général à des calculs en fait inutilement compliqués, précisément parce qu'elle donne une identité aux éléments abstraits de la théorie, détournant ainsi l'attention des concepts essentiels. On peut penser qu'il s'agit de la pire manière de faire des probabilités, mais que le passage par cette étape peut constituer une phase intéressante dans l'apprentissage, en motivant les approches plus abstraites indiquées plus haut.
Donnons un exemple. On choisit $\Omega = [0,1[$, $\mathcal{T}$ est la tribu borélienne (plus petite tribu contenant tous les intervalles de $[0,1]$, complétée pour contenir aussi toutes les parties contenues dans un événement de mesure de Lebesgue

nulle), et P la mesure de Lebesgue, qui à un intervalle associe sa longueur. On définit les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots$ de la manière suivante :
• $X_1(t) = 1$ si $t \in [0, 1/2[$, $X_1(t) = 0$ sinon ;
• $X_2(t) = 1$ si $t \in [0, 1/4[$ ou si $t \in [1/2, 3/4[$, $X_2(t) = 0$ sinon ;
et ainsi de suite. Chaque X_{i+1} vaut 1 sur la "première moitié" des 2^i intervalles associés à X_i et 0 sur la deuxième moitié.
La famille $(X_1, X_2, \ldots)$ constitue un modèle du jeu de pile ou face infini (où l'on suppose la pièce équilibrée et l'indépendance des résultats). Dans ce modèle, le choix initial de t détermine tout le déroulement du jeu (jusqu'à l'infini). On peut voir là au moins deux difficultés.

• La signification de ce choix de t peut poser des difficultés variées, liées au manque de compatibilité entre l'idée du hasard qui préside au résultat de chaque partie et celle au contraire d'une forme de prédestination…
• D'un point de vue didactique et épistémologique, le dénuement du modèle rend difficile à accepter l'idée de hasard associée au jeu.

Toutes ces remarques indiquent les difficultés que pose le choix d'un modèle quantitatif quand il s'agit de théorie des probabilités. Pourtant ces modèles ont du succès, notamment dans leurs applications. Ce succès tient au fait que, une fois établi et assimilé un dictionnaire entre « *vision naïve des probabilités* » et « *propriétés mathématiques du modèle* », la capacité prédictive des modèles probabilistes devient aussi bonne que celle des modèles mathématiques de la physique, par exemple.

Cette capacité prédictive des modèles mathématiques des probabilités à travers des lois du hasard, quantitatives et asymptotiques, c'est l'objet de la sixième partie du livre. Nous parlons ici de prédiction quantitative. Examinons un premier énoncé quantitatif :
« *Si on lance un dé équilibré, chaque face a 1 chance sur 6, ou encore une probabilité 1/6, d'apparaître* ».
Cet énoncé quantitatif a un sens précis dans le cadre d'un modèle. Il n'en a aucun, sinon l'expression de notre croyance en une symétrie géométrique a priori que l'expérience aléatoire va se faire un plaisir de briser, dans le cadre du jeu de dé lui-même. Dans l'expérience consistant à lancer un dé et à observer le numéro écrit sur la face qui se trouve sur le dessus, il n'y a rien qui soit égal à 1/6.
On donnera plus de sens à ce nombre 1/6 en répétant 1000 fois l'expérience et en déterminant la fréquence d'apparition de chaque face. Cette fréquence représente maintenant une donnée quantitative que l'on peut comparer à 1/6, et l'expérience prouve que les six fréquences obtenues au bout des 1000 lancers sont en général assez voisines de 1/6. Et si on lance 10 000 fois au lieu de 1000, ce sera encore plus vrai…

C'est ce type de constatation qui conduit à dire que les lois mathématiques du hasard sont forcément des lois asymptotiques, et que ce sont ces lois qui ont une force prédictive.
La plus connue de ces lois asymptotiques est la loi des grands nombres. Cette loi possède deux variantes, connues sous le nom de loi faible et loi forte, que nous énonçons ci-dessous sans entrer dans les détails techniques. Dans la suite, $X_1, X_2, \ldots$ désignent les résultats (quantitatifs) d'expériences aléatoires reproduites à l'identique et indépendamment. On note M_n la moyenne empirique

$$M_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

Loi forte des grands nombres.– Avec probabilité 1, la moyenne empirique tend vers l'espérance E(X). On dit aussi que la suite de terme général M_n converge presque sûrement vers E(X).

Loi faible des grands nombres.– Pour tout $\varepsilon > 0$, la probabilité pour que $|M_n - E(X)| > \varepsilon$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. On dit aussi que la suite de terme général M_n converge en probabilité vers $E(X)$.

Pour des variables aléatoires X_n de carré intégrable, la loi faible se démontre très facilement en utilisant l'additivité de la variance pour des variables indépendantes et l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff. La loi forte est plus difficile, même pour des variables de carré intégrable. Elle est vraie — mais la démonstration est plus difficile— pour des variables seulement supposées intégrables (en théorie des probabilités, c'est une hypothèse plus faible). Par ailleurs, il est facile de prouver que la convergence presque sûre implique la convergence en probabilités, et par conséquent que la loi forte implique la loi faible. Cette dernière est donc, elle aussi, vraie pour des variables seulement intégrables.
Ces deux lois ont des significations très différentes.
• La première n'a de sens que si l'on suppose que chaque « occurrence » ω du hasard détermine l'ensemble infini de tous les résultats des expériences réalisées. La loi forte dit alors que cette suite converge en moyenne de Césaro vers $E(X)$ sauf pour un ensemble de valeurs de ω dont la probabilité vaut 0. On retrouve les difficultés épistémologiques liées à l'infini mentionnées plus haut.
• La deuxième pose beaucoup moins de problèmes d'interprétation. Elle dit que, lorsque l'on réalise n fois l'expérience et que l'on considère tous les résultats possibles pour la moyenne empirique M_n, la plupart des valeurs prises par la variable M_n sont voisines de $E(X)$ quand n est grand.

Au lycée, les élèves se sont habitués à l'idée de stabilisation des fréquences mentionnée plus haut. Ils s'y sont habitués :

▷ dans un cadre d'expérimentation (jeux ou expériences de hasard réalisés dans la classe, le nombre d'élèves permettant d'obtenir un grand nombre de tirages) ;
▷ dans un cadre de simulation : calculatrices, tableurs et autres simulateurs ad hoc permettent de « *faire comme si* » en économisant du temps et sans doute un peu de désordre…
L'adéquation des résultats obtenus dans les deux cadres montre a priori uniquement que les simulateurs sont bien programmés (ceci étant d'ailleurs plus ou moins vrai d'une technologie à l'autre). En revanche, la stabilité des fréquences est un fait scientifique, de nature expérimentale, qui ne relève pas du modèle mathématique mais de ce que nous appellerons des « lois du hasard », auxquelles il ne semble pas plus inadéquat de croire qu'à la loi de la gravitation universelle, dans la mesure où dans les deux cas n'existe guère qu'une validation expérimentale, mais où celle-ci n'a jamais été mise en défaut. Les élèves débutants manquent sans doute d'outils et de connaissances pour se poser de telles questions, mais on peut considérer que l'adéquation entre les résultats expérimentaux (les lois du hasard) et les prévisions du modèle mathématique (la loi faible des grands nombres) constitue une validation raisonnable du modèle. Cette adéquation permet en particulier de parler de *probabilité a priori* (celle du modèle : *subjective et souvent géométrique*) et de *probabilité a posteriori* (celle de l'expérience : *objective et asymptotique*) et de les comparer.
Ce type de questionnement a été retenu par les auteurs du programme de première et apparaît dans les commentaires de ce programme : « la simulation permet d'une part d'avoir des estimations de résultats impossibles à calculer explicitement et d'autre part, par la comparaison de résultats simulés à des résultats expérimentaux, de valider des modèles ».

Enfin, la septième partie du livre est consacrée à des chapitres plus « avancés » de la théorie des probabilités, comme les chaînes de Markov, les martingales ou les marches aléatoires, qui intéresseront principalement les étudiants de master. On y trouve également des chapitres concernant quelques thèmes chers aux auteurs comme la loi de Benford, des problèmes de dés ou encore quelques développements autour du problème des anniversaires.

Certains de nos collègues de l'université de La Rochelle nous ont soutenus tout au long de notre projet. Nous pensons notamment à Laurence Cherfils, Fabienne Marotte et Jean-Marc Garnier. Qu'ils en soient remerciés.
Nous remercions particulièrement nos collègues Gilles Bailly-Maitre, Noel Fraisseix (tous deux également soutien de la première heure) ainsi que Gregory Liorit qui ont relu quelques chapitres du livre et suggéré quelques modifications.
Un grand merci également aux éditions Calvage & Mounet, et plus particulièrement à Rached Mneimné, pour le soin apporté à l'aboutissement de ce livre.

À la mémoire de Frédéric Testard (1961-2018)

La décision d'écrire ce livre date de la fin de l'année 2015. Frédéric et moi partagions l'essentiel de nos enseignements depuis une dizaine d'années et l'idée d'écrire un livre ensemble date des débuts de cette période. Cependant, l'ampleur de la tâche m'a longtemps fait peur. C'était sans compter sur l'opiniâtreté et la force de persuasion de Frédéric. Il est le principal artisan de ce livre. Il en est à l'origine et à la conclusion. C'est lui encore qui rompait les périodes d'inactivité. Je me souviens du moment où il m'a décrit les grandes lignes du projet. Et, devant ma mine déconfite, pour me rassurer, il m'a dit qu'il y avait un millier de pages rédigées et disséminées dans son ordinateur. C'était devenu un sujet de plaisanterie entre nous : Frédéric mène mille à zéro. Durant ces presque trois années de rédaction, son envie d'expliquer des mathématiques n'a jamais faibli.

Table des matières

Probabilités 1 - P'têt ben qu'non...

Première partie - Des réponses aux problématiques issues des jeux et de la vie courante

I. Le hasard fait bien les choses

1. Panorama 5
2. Expérience aléatoire 5
3. La loi naïve des grands nombres 7
4. Deux problèmes fondateurs 9
   4.1. Le problème de Galilée – ou du duc de Toscane 9
   4.2. Le problème du chevalier de Méré 9
5. Expérience et simulation : l'importance de la modélisation . . . 10
6. Exercices 12

II. Probabilités élémentaires

1. Panorama 13
2. Univers associé à une expérience aléatoire finie 14
3. Définition constructive de la probabilité 15
4. Le cas de l'équiprobabilité 16
5. Un modèle quasi-universel : le modèle d'urne 17
6. Formulaire 18
7. Petit dictionnaire 21
8. Définition axiomatique de la probabilité 22
9. Et si l'on modifie l'expérience ? 23
10. La solution des deux problèmes fondateurs 25
    10.1. Le problème de Galilée, ou du duc de Toscane 25
    10.2. Problème du chevalier de Méré 26
11. Exercices 27

III. Outil 1 - Utilisation du tableur
1. Panorama 33
2. Pratique du tableur 33
2.1. Affichage des entêtes de lignes et colonnes 34
2.3. Saisie des formules au tableur 34
2.5. Nommer une zone 36
2.6. Deux fonctions utiles pour les probabilités 37
3. Simulation et fluctuation d'échantillonnage 38
4. Ne peut-on simuler que ce que l'on connaît ? 41
5. Exercices 42

IV. Outil 2 – Éléments d'analyse combinatoire
1. Panorama 47
2. Principe additif 47
3. Principe multiplicatif 49
4. Parties, arrangements, combinaisons 51
5. Quelques beaux problèmes 59
5.1. Comment partager l'addition ? 59
5.5. Le jeu de dobble 64
5.9. Il y a crible et crible : Poincaré et Ératosthène 68
5.12. Dénombrer les dérangements 70
6. Exercices 72

Deuxième partie - Aux urnes, citoyens !

V. Variables aléatoires finies
1. Panorama 93
2. Variable aléatoire et loi de probabilité finies 93
2.1. Variable aléatoire finie 93
2.3. Loi de probabilité finie 94
3. Fonctions de répartition et de survie 97
4. Espérance 99
5. Variance et écart-type 103
6. Fonction génératrice des moments 105
7. Des inégalités 107
8. Automatisation des calculs 109
8.1. Représentation d'une loi finie 109
8.2. Calcul des caractéristiques numériques d'une loi finie . . . 110
8.3. Simulation d'une loi finie 111
9. Exercices 113

VI. Conditionnement et indépendance
1. Panorama 121
2. Probabilité conditionnelle. Événements indépendants 122
2.1. Une approche statistique du conditionnement 122
2.6. Extension à des univers aléatoires finis généraux 126
3. Des conditionnements paradoxaux 131
3.1. Le rouge et le noir. 131
3.2. *Let's make a deal* : le paradoxe de Monty Hall 131
3.3. P'tetbenq oui. 134
4. Lois conditionnelles. Variables aléatoires indépendantes 135
4.1. Conditionnement d'une variable par un événement 135
4.2. Conditionnement d'une variable par une autre variable . . 135
5. Caractérisation « intégrale » de l'indépendance 143
6. Espérance conditionnelle 147
6.1. Espérance conditionnelle sachant un événement 147
6.3. Espérance conditionnelle sachant une variable aléatoire . . 148
7. Propriétés de l'espérance conditionnelle 149
8. Caractérisation par les espérances de l'espérance conditionnelle . 153
9. Exercices 155

VII. Lois finies classiques – Petit catalogue
1. Panorama 167
2. Loi uniforme 168
3. Loi de Bernoulli 168
4. Loi binomiale 168
5. Loi hypergéométrique 173
6. Sommes de variables finies indépendantes 176
6.1. Loi de la somme : convolution discrète 178
6.7. Somme « binomiale » de variables de Bernoulli 179
7. Automatisation des calculs 181
7.1. Loi binomiale : calculs de probabilités avec le tableur . . . 181
7.2. Loi binomiale : calculs de probabilités avec Geogebra 182
7.3. Loi hypergéométrique 183
7.4. Sommes de variables indépendantes : simulation avec le tableur 183
7.5. Sommes de variables indépendantes : calcul avec Python . . 187
8. Exercices 190

VIII. Outil 3 – Simuler et visualiser avec Python
1. Panorama . . . 213
2. Jupyter Notebook . . . 213
2.1. Installer le Jupyter Notebook . . . 214
2.2. Lancer le Jupyter Notebook . . . 214
2.3. Créer un notebook . . . 215
2.4. Utiliser le Jupyter Notebook . . . 216
2.4.1. Le mode édition . . . 216
2.4.2. Le mode commande . . . 216
2.4.3. Sauver et fermer un notebook . . . 217
3. Quelques éléments de syntaxe du langage Python . . . 217
3.1. Structures de données . . . 217
3.1.1. Booléens et tests . . . 217
3.1.2. Les types numériques . . . 218
3.1.3. Les listes . . . 218
3.1.4. Les tuples . . . 220
3.1.5. Les ensembles . . . 222
3.2. Bases de programmation . . . 224
3.2.1. Variables, déclaration et affectation . . . 224
3.2.2. Séquences . . . 226
3.2.3. Structures conditionnelles . . . 226
3.2.4. Structures itératives, boucles . . . 228
3.2.5. Fonctions . . . 229
4. Modules complémentaires . . . 230
4.1. Comment importer un module . . . 230
4.2. Le module math . . . 231
4.3. Le module numpy et le sous-module numpy.random . . . 232
4.3.1. Les fonctions mathématiques habituelles . . . 232
4.3.2. Les tableaux . . . 232
4.3.3. Le sous-module numpy.random . . . 235
4.4. Le sous-module stats du module scipy . . . 236
4.5. Le module matplotlib . . . 238
5. Exercices . . . 241

IX. Outil 4 - Fonctions génératrices
1. Panorama . . . 245
2. Fonction génératrice d'une variable finie à valeurs dans $\mathbb{N}$ . . . 246
3. Fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires . . . 248
3.1. Somme d'un nombre fixe de variables . . . 248
3.3. Somme d'un nombre aléatoire de variables . . . 249
4. Fonction génératrice, espérance et variance . . . 251
5. Fonction génératrice d'un couple et indépendance . . . 251
6. Exercices . . . 253

Troisième partie - À petits pas vers l'infini

X. On ne peut pas se contenter du fini

1. Panorama 259
2. Espaces probabilisés discrets 260
   - 2.1. Ensembles dénombrables 260
   - 2.4. Univers aléatoires discrets 261
   - 2.6. Loi de probabilité discrète 262
3. Formulaire 264
4. Un modèle pour le jeu de pile ou face infini ? 270
5. Exercices 271

XI. Variables aléatoires discrètes

1. Panorama 279
2. Variables et lois de probabilité discrètes 280
   - 2.1. Variables aléatoires discrètes. 280
   - 2.5. Loi de probabilité 282
   - 2.8. Fonction de répartition et de survie 283
3. Variables indépendantes 285
4. Espérance d'une loi discrète 286
   - 4.1. Définition de l'espérance 286
   - 4.3. Propriétés de l'espérance 287
5. Espérance et indépendance 296
6. Espérance et convergence 298
7. Variance d'une loi discrète 304
8. Fonction génératrice des moments 307
9. Inégalités 310
10. Conditionnement 310
11. Exercices 312

XII. Lois discrètes classiques – Petit catalogue

1. Panorama 321
2. Loi de Poisson 322
   - 2.1. L'opiniâtreté du malchanceux 322
   - 2.3. Loi de Poisson 324
3. Loi géométrique 327
4. Loi de Pascal, loi binomiale négative 335
5. Sommes de variables discrètes indépendantes 341
   - 5.1. Somme d'un nombre fixe de variables 341
   - 5.5. Somme d'un nombre aléatoire de variables 343
6. Automatisation des calculs 347
   - 6.1. Loi de Poisson : probabilités et fonction de répartition 347
   - 6.2. Loi binomiale négative et loi de Pascal 348

6.3. Simulation avec Python 349
7. Exercices 352

XIII. Temps d'attente
1. Panorama 361
2. Temps d'attente du $n^{\text{ème}}$ succès 362
2.1. Temps d'attente du premier succès 363
2.5. Temps d'attente du $n^{\text{ème}}$ succès 364
3. Un processus à accroissements homogènes et indépendants . . . 366
3.1. Loi des accroissements 366
3.6. Loi conjointe et indépendance des accroissements 371
4. Deux applications 373
4.1. Les partis de Pascal – Énoncé 373
4.2. Les partis de Pascal – Solution récursive 375
4.4. Les partis de Pascal - Solution de Pascal et Fermat 376
4.6. Les partis de Pascal – Solution par les temps d'attente . . 376
4.8. Les allumettes de Banach 378
5. Suites de piles consécutifs 380
5.1. Simulation 380
5.2. Calculs 381
5.5. Temps d'attente d'une suite de piles consécutifs : loi et espérance 383
6. Paradoxe de Penney et théorème de Conway 388
6.1. Tous les motifs ne sont pas égaux 388
6.2. Théorème de Conway 389
6.5. Détermination du temps d'attente moyen 390
6.10. Affrontement de deux joueurs 393
6.14. Simulation en Python du théorème de Conway 395
7. Exercices 398

XIV. Outil 5 – Séries numériques
1. Panorama 421
2. Séries numériques – Convergence 422
3. Convergence des séries à termes positifs 424
3.4. Théorèmes de comparaison et d'équivalence 425
3.7. Séries de référence 426
3.12. Quelques critères supplémentaires 426
4. Convergences absolue et commutative 428
4.1. Convergence absolue 428
4.4. Convergence commutative 429
5. Séries semi-convergentes 433
5.1. Définition et exemples 433
5.5. Les mystères de « la » somme d'une série alternée 434

6. Séries doubles – Théorèmes de Fubini 436
7. Série produit 446
8. Exercices 447

XV. Outil 6 – Séries entières et fonctions génératrices
1. Panorama 457
2. Séries entières – Convergence 457
3. Propriétés de la somme d'une série entière 459
4. Les séries classiques à connaître 461
5. Fonction génératrice des variables entières 464
5.1. Définition et propriétés élémentaires 464
5.4. Moments d'ordre 1 et 2 et fonction génératrice 465
5.6. Fonction génératrice et sommes de variables entières 467
6. Fonction génératrice d'une suite 468
7. Fonctions génératrices en analyse combinatoire 473
8. Exercices 476

Quatrième partie - Le continu chasse le discret

XVI. L'indispensable continu
1. Panorama 485
2. Des problèmes historiques 486
2.1. Le problème de l'aiguille de Buffon 487
2.2. Le paradoxe de Bertrand 489
3. Faire du discret avec du continu 491
4. Un modèle pour le jeu de pile ou face 494
5. Pour finir : la généricité des variables continues 496
6. Exercices 496

XVII. Variables aléatoires continues à densité
1. Panorama 503
2. Lois continues à densité 504
3. L'existence de la loi uniforme : un premier regard 507
4. Fonctions de répartition et de survie d'une loi à densité 508
5. Espérance d'une loi à densité 509
6. Variance d'une loi à densité 519
7. Fonction génératrice des moments 520
8. Inégalités 522
9. Exercices 523

XVIII. Lois à densité classiques – Petit catalogue
1. Panorama 541
2. Lois uniformes 541
2.1. Lois uniformes 541
2.5. Loi uniforme et simulation 544
3. Lois exponentielles 545
4. Lois Gamma 548
5. Lois de Cauchy 550
6. Lois gaussiennes 551
7. Automatisation des calculs 555
7.1. Simulation en utilisant le tableur 555
7.2. Simulation avec Python 556
8. Exercices 562

XIX. Vecteurs aléatoires, indépendance
1. Panorama 577
2. Vecteurs à densité, lois marginales 578
3. Variables indépendantes 580
4. Caractérisation intégrale de l'indépendance 582
5. Quelques problèmes classiques 583
5.1. L'aiguille de Buffon 583
5.2. Le paradoxe de Bertrand 584
5.3. Le jeu de « franc-carreau » 585
6. Simulation par la méthode de rejet 586
7. Exercices 590

XX. Sommes de variables indépendantes
1. Panorama 607
2. Loi de la somme de deux variables indépendantes 608
3. Une autre méthode : les fonctions caractéristiques 610
3.1. Introduction 610
3.2. Fonction caractéristique d'une variable aléatoire 610
3.9. Application aux sommes de variables aléatoires 613
3.12. Un petit catalogue de fonctions caractéristiques 614
4. Sommes de variables usuelles 615
5. Exercices 619

XXI. Conditionnement
1. Panorama 635
2. Conditionnement entre variables discrète et à densité 635
2.1. Conditionnement d'une variable à densité par une variable discrète 636
2.8. Conditionnement d'une variable discrète par une variable à densité 638

3. Conditionnement entre deux variables à densité 642
4. Caractérisation intégrale de l'espérance conditionnelle 644
5. Appendice : conditionnement pour un couple sans densité 648
6. Exercices 649

XXII. Outil 7 – Intégrales généralisées
1. Panorama 655
2. Intégrales généralisées – Convergence 655
3. Intégrales généralisées et fonctions positives 658
4. Intégrales généralisées de fonctions de signe quelconque 659
4.1. Convergence absolue et intégrabilité 659
4.4. Semi-convergence 660
5. Suites d'intégrales généralisées 660
6. Application : fonctions définies par une intégrale 661
7. Application : fonction caractéristique des lois classiques 662
8. Exercices 667

XXIII. Outil 8 – Intégrales multiples
1. Panorama 671
2. Intégrales doubles 672
2.1. Définition géométrique des intégrales doubles 672
2.2. Quelques propriétés générales 673
3. Calcul des intégrales doubles : théorèmes de Fubini 673
4. Calcul en coordonnées polaires 676
5. Calcul des intégrales par changement de variables 677
6. Exercices 678

Bibliographie **681**
Notations **689**
Index **691**

Table des matières du tome 2

Probabilités 2 - ... P'têt ben qu'oui

Cinquième partie - La grande unification

XXIV. Espaces probabilisés abstraits

1. Panorama . . . 5
2. Espaces probabilisés abstraits . . . 6
   - 2.1. Les événements . . . 6
   - 2.7. Définition axiomatique d'une probabilité . . . 8
   - 2.10. Propriétés des probabilités . . . 8
3. Exemple fondamental : $[0,1[$ et la mesure de Lebesgue . . . 11
4. D'autres exemples classiques . . . 12
5. Variables aléatoires . . . 14
6. Loi d'une variable aléatoire . . . 16
7. Fonction de répartition d'une variable réelle . . . 17
   - 7.1. Propriétés générales des fonctions de répartition . . . 17
   - 7.5. Inversion des fonctions de répartition et simulation . . . 18
8. Densité des variables finies . . . 21
9. Exercices . . . 25

XXV. Espérance et variance

1. Panorama . . . 29
2. Définition abstraite de l'espérance . . . 30
3. Variance . . . 34
4. Inégalités . . . 35
5. Convergences . . . 37
6. Fonction génératrice des moments . . . 38
7. Exercices . . . 41

XXVI. Indépendance

1. Panorama . . . 45
2. Variables aléatoires indépendantes . . . 45
3. Caractérisation intégrale de l'indépendance . . . 53
4. Exercices . . . 55

XXVII. Conditionnement

1. Panorama 61
2. Le théorème de Radon-Nykodym 61
3. Probabilité conditionnelle 66
4. Espérance conditionnelle 73
5. Théorèmes de convergence conditionnels 74
6. Calcul des espérances conditionnelles 76
7. Caractérisation intégrale de l'espérance conditionnelle 79
8. L'espérance conditionnelle comme projection orthogonale 82
9. Exercices 84

XXVIII. Existence de modèles probabilistes

1. Panorama 87
2. Construction de mesures par prolongement 88
3. Unicité des prolongements 95
4. La mesure de Lebesgue 98
5. Un premier modèle pour le jeu de pile ou face 105
6. Construction d'une suite de variables uniformes indépendantes . 107
7. Un autre modèle pour le jeu de pile ou face 110
8. Le théorème de Kolmogorov 116
9. Exercices 122

XXIX. Outil 9 - Propriétés de l'intégrale de Lebesgue

1. Panorama 131
2. Rappel - Construction de l'intégrale de Riemann 132
3. Le cadre : espaces mesurés 134
4. L'intégrale de Lebesgue 138
   - 4.1. Intégrale des fonctions étagées positives 138
   - 4.7. Intégrale des fonctions mesurables positives 142
   - 4.14. Intégration des fonctions de signe quelconque 146
   - 4.23. Propriétés algébriques de l'intégrale de Lebesgue 150
5. Ensembles de mesure nulle, égalité presque partout 153
6. Des passages à la limite simplifiés 156
7. Les espaces L^p 167
   - 7.1. Préliminaire : des espaces dont les éléments sont des classes de fonctions 167
   - 7.2. Les espaces L^p : définitions et propriétés topologiques . . . 167
   - 7.9. Relations d'inclusion entre les $L^p(\Omega)$ 173
8. Théorèmes de densité et applications 175
9. Mesures produit, intégrales multiples et théorèmes de Fubini . . 177
10. Applications à la théorie des probabilités 180
    - 10.1. Mesures à densité 180
    - 10.4. Mesures images et théorème de transfert 184
11. Exercices 187

Sixième partie - Le hasard dompté

XXX. Divers modes de convergence

1. Panorama . . . 205
2. Convergence en loi . . . 206
3. Convergence de lois binomiales vers une loi de Poisson . . . 217
4. Une propriété de compacité . . . 218
5. Convergence en probabilité . . . 221
6. Loi faible des grands nombres . . . 223
7. Convergence presque sûre . . . 224
8. Convergence dans $L^p(\Omega)$ . . . 226
9. Relations entre les divers modes de convergence . . . 227
10. Le rôle de l'équiintégrabilité . . . 229
11. Exercices . . . 234

XXXI. Le théorème central-limite

1. Panorama . . . 249
2. Fonction caractéristique et convergence . . . 250
   2.1. Rappels . . . 250
   2.2. Inversion de la fonction caractéristique . . . 250
   2.4. Convergence et fonction caractéristique : le théorème de Paul Lévy . . . 251
3. Théorème central-limite . . . 254
   3.2. Le cas particulier du jeu de pile ou face équilibré . . . 255
   3.3. Le cas général . . . 260
4. Estimation de l'erreur : le théorème de Berry-Esseen . . . 260
   4.1. Inversion de la transformation de Fourier et conséquences . 260
   4.7. Le théorème de Berry-Esseen . . . 269
5. Approximation normale de lois binomiales . . . 274
6. Exercices . . . 275

XXXII. Loi forte des grands nombres

1. Panorama . . . 289
2. Lemme de Borel-Cantelli . . . 290
3. Loi du tout ou rien . . . 293
4. La longueur des longues suites de succès à pile ou face . . . 293
5. Limites de sommes de variables indépendantes . . . 296
6. Loi faible des grands nombres . . . 301
7. Loi forte des grands nombres . . . 306
   7.2. Calculs préliminaires . . . 307
   7.7. Démonstration de la loi forte des grands nombres . . . 311
8. Exercices . . . 313

Septième partie - Pour aller plus loin

XXXIII. Les dés sont jetés

1. Panorama 329
2. Paradoxe de Condorcet et dés non transitifs 330
3. Des trucages possibles et d'autres non 332
   3.1. Les dés de Sicherman 333
   3.4. D'autres décompositions de sommes de dés équilibrés . . . 337
   3.18. La somme n'est jamais uniforme... 357
4. Décompositions de lois uniformes en sommes de lois finies 361
5. Exercices 373

XXXIV. Des coïncidences pas si troublantes

1. Panorama 395
2. Des classes de 23 pour économiser les bougies... 396
   2.1. L'énoncé du problème 396
   2.2. Un univers aléatoire 396
3. Le problème des anniversaires - Solution générale 398
   3.1. Modélisation et expression de la probabilité 399
   3.2. Un outil d'analyse : la formule de Stirling 400
   3.5. Calcul approché de $P(N,n)$ et du seuil $n(N)$ 401
   3.8. Une estimation plus précise de $P(N,n)$ et $n(N)$ 406
   3.9. Pour aller plus loin : des doubles coïncidences ? 409
4. Quelques applications 411
   4.1. Comptage de population 411
   4.2. Sondage avec ou sans répétition ? 413
   4.3. Fonctions de hachage et sécurité informatique 413
   4.4. Fiabilité des tests ADN 414
5. Exercices 415

XXXV. Marches aléatoires

1. Panorama 425
2. Théorème du scrutin et principe de réflexion 426
   2.1. Le théorème du scrutin : problématique et modèles 426
   2.3. Le théorème du scrutin : principe de réflexion 431
3. Passages en 0 des marches dans $\mathbb{Z}^2$ 434
   3.1. Marche associée à une partie finie de pile ou face 434
   3.4. Le problème des retours en 0 436
4. Exercices 449

XXXVI. Chaînes de Markov
1. Panorama 473
2. Définitions et propriétés élémentaires 474
2.1. Chaînes de Markov 474
2.5. Distributions conjointes finies 476
3. Irréductibilité 478
4. Période d'une chaîne de Markov 480
5. Distributions stationnaires 481
6. Etats transitoires et récurrents 483
7. Distributions stationnaires, ergodicité et retours 487
8. Un regard algébrique - Le théorème de Perron-Frobenius 497
8.1. Vocabulaire et notations 497
8.2. Recherche de la plus grande valeur propre 498
8.7. Application aux chaînes de Markov finies 501
9. Retour sur le temps moyen d'obtention d'un motif à pile ou face 502
10. Automatisation des calculs 507
10.1. Calcul de la distribution stationnaire 507
10.2. Calcul des lois itérées et convergence vers π 509
10.3. Simulation de l'évolution de la chaîne 510
11. Exercices 513

XXXVII. Martingales
1. Panorama 549
2. Martingales, sous-martingales, surmartingales 550
3. Inégalités - Cas des sous-martingales 554
4. Convergence des martingales et sous-martingales 557
5. Martingales renversées 562
6. Arrêt optionnel, temps d'arrêt 563
7. Inégalités - Cas des surmartingales 568
8. Convergence des surmartingales 571
9. Tout le monde ne peut pas perdre indéfiniment... 572
10. Exercices 576

XXXVIII. Splendeurs et misères de la loi de Benford
1. Panorama 587
2. La loi de Benford : un peu d'histoire 587
3. La question des fondements : intra ou extra-mathématique ? . . 588
3.1. Pourquoi le problème n'admet pas de solution simple . . . 588
3.2. La démarche de Benford : une moyenne de lois uniformes . 591
4. Une autre approche : les moyennes de Cesaro itérées 594
5. Une loi de la nature ? 609
5.1. Deux propriétés d'invariance 609
5.2. Une loi sans fonction de répartition 609

5.4. Le bon espace probabilisé 610
5.7. Un peu d'algèbre sur $[0, 1[$ 611
5.11. Construction d'une « pseudo-fonction de répartition » . . . 613
5.16. Caractérisation de la loi de Benford par l'invariance par changement d'échelle 617
6. Des applications et des questions 622
6.1. Fraudes fiscales, comportements des marchés 622
6.2. La loi de Benford doit-elle faire la loi ? 623
7. Une généralisation : suites d'entiers benfordiennes 626
8. Exercices 628