Im-et-Ker

101. — Les clefs pour l'X. Bernard Randé & Franck Taïeb
102. — Les clefs pour l'X (2). Roger Mansuy & Bernard Randé
103. — Les clefs pour les Mines. Françoise Fontanez & Bernard Randé
104. — Problèmes clefs pour mathématiques supérieures. Hervé Gianella, Romain Krust, Franck Taïeb & Nicolas Tosel
105. — Les clefs pour la PSI et la PSI*. Roger Mansuy & Bernard Randé
106. — Une année de colles en Math Sup MPSI. Éric Kouris
107. — Les clefs pour les Hautes Études Commerciales. Philippe Gallic & Jean-Louis Grappin
108. — Le jardin d'Eiden. Une année de colles en MP*. Jean-Denis Eiden
109. — Un Max de Maths. Maxime Zavidovique
110. — Mathématiques pour la voie économique et commerciale. Jérôme Gärtner
111. — Probabilités. Cours et exercices corrigés (1). Thierry Meyre
112. — Les clefs pour l'écrit MP de mathématiques (session 2015). Bernard Randé, Alix Deleporte-Dumont, Quentin Guignard
113. — Les clefs pour l'oral MP de mathématiques, X-ENS (session 2015). Quentin Guignard, Bernard Randé
114. — Les clefs pour l'écrit de mathématiques des concours 2016, filière MP. Clément de Seguins Pazzis
115. — Les clefs pour l'Info. Ismael Belghiti, Roger Mansuy et Jill-Jênn Vie.
116. — Les nouvelles clefs pour les Mines-CCP (tome I). Oral MP, 2015-16. Bernard Randé
117. — Agrégation interne. Algèbre générale, algèbre linéaire et un peu de géométrie. Georges Skandalis
118. — Florilège d'exercices de l'oral d'HEC. Jean-Louis Roque
119. — Les clefs pour l'écrit MP 2017 – Mathématiques. Clément de Seguins Pazzis
120. — Les clefs pour l'écrit de mathématiques et d'informatique. Filière PSI 2015-2016. L. Cozar, N. Jousse, B. Randé, L. Sartre
121. — Agrégation interne. Analyse. Georges Skandalis
122. — Les clefs pour l'oral MP de mathématiques, X-ENS (2016-2017). Thomas Blomme, Louise Gassot, Quentin Guignard, Bernard Randé

Thomas Blomme, Louise Gassot,
Quentin Guignard, Bernard Randé

Les Clefs pour l'oral MP, mathématiques, ENS-X

(sessions 2016 et 2017)

Calvage & Mounet

Thomas Blomme, ancien élève de l'Ens de la rue d'Ulm, prépare actuellement une thèse de mathématiques.

Louise Gassot est élève de quatrième année à l'Ens de la rue d'Ulm.

Quentin Guignard, ancien élève de l'Ens de la rue d'Ulm, prépare actuellement une thèse de mathématiques. Il est coauteur des ouvrages de la présente collection référencés sous les numéros 112 et 113.

Bernard Randé, ancien élève de l'Ens de Saint-Cloud, a été notamment professeur en classe de MP* au lycée Louis-le-Grand. Il est membre du comité de rédaction de la RMS, auteur de livres d'exercices (éditions Vuibert), d'exercices corrigés (éditions Calvage et Mounet), de problèmes corrigés et des *Carnets indiens de Srinivasa Ramanujan* (éditions Cassini).

∞ Imprimé sur papier permanent

(Rimes riches et oral imparfaits)

Il serait bon que vous différentiassiez
Ce facteur, non pas que vous l'intégrassiez.
Et aussi que vous diagonalisassiez,
Cette matrice (bien sûr sans préjudicier
Qu'à l'instant vous orthonormalisassiez
La base)... Se pourrait-il que vous chouinassiez ?

Vous voulez vous saler ?
Alors, Alphonse, allez !

Préface

En mathématiques, il y a deux façons d'embrasser les contenus : soit en apprenant, soit en comprenant. Mais il n'y en a qu'une de les mettre en œuvre : en faisant des exercices. On conviendra en effet que la résolution d'exercices permet de tisser petit à petit les liens invisibles par lesquels tiennent les idées en mathématiques. Les exercices donnent chair au théorème ; en incarnant ses hypothèses, l'exercice met en évidence sa puissance mais, de façon paradoxale, souligne parfois son inadéquation à la résolution d'un problème particulier : il faut alors créer soi-même le petit bout de chemin qui permette d'aller jusqu'à la théorie générale. Les hypothèses sont elles aussi souvent cachées : les mettre en évidence est en soi un travail qui est loin d'être facile.

Au travers de la pratique des exercices, l'étudiant développe le processus mental de la résolution : l'accumulation d'expériences, la création de moteurs d'analogie, la mise en place d'un réseau de communication entre les concepts, et ainsi de suite. La pratique régulière d'exercices aboutit à terme à ce que l'étudiant sépare automatiquement les aspects techniques des concepts plus profonds : libéré de la crainte de la technicité, l'activité de réflexion se concentre alors sur la compréhension et la démonstration, et par extension sur la relation avec l'examinateur.

Une difficulté souvent sous-estimée, c'est de mesurer… la difficulté d'un exercice. Cela se comprend bien : savoir d'un exercice qu'il est difficile, c'est avoir presque instantanément exploré les voies faciles qui mènent à sa solution. Le rôle de la pratique préalable des exercices est de faire ce travail, avec une rapidité souvent déconcertante pour le sujet lui-même : un peu comme un maître des échecs ne pense même pas aux deux prochains coups, mais peut se projeter dans la stratégie qui va guider les coups suivants. Bien sûr, l'intérêt de cette capacité est évident : si l'exercice tombe sous le coup d'une méthode éprouvée, elle sera reconnue sans peine et sans fatigue, ce qui permettra de se concentrer sur les difficultés techniques, s'il y en a. S'agissant de l'X, il n'est pas improbable que l'exercice soit ardu, mais ce serait une erreur que de le postuler. La méthode est toujours d'examiner froidement le problème afin d'aider son cerveau à se mettre en position de faire les essais nécessaires. Si l'exercice est difficile, le cerveau se placera de lui-même dans la configuration la plus apte pour le résoudre. S'agissant de certains exercices d'ENS, il faut bien comprendre que, quand bien même l'énoncé comporterait quatre questions, en avoir abordé une seule, sans même l'avoir complètement résolue, peut être le signe d'une haute performance.

Tout cela suppose une pratique régulière et sérieuse. Cet ouvrage est fait pour cela.

Il est à noter que, les programmes ayant profondément changé lors de la session 2015, on ne trouvera dans cet ouvrage que des exercices des sessions postérieures, précisément des sessions 2016 et 2017. Néanmoins, dans quelques cas, il faut bien admettre qu'il s'est trouvé des examinateurs pris de court par les changements de programmes, et que certains exercices (notamment aux ENS) font appel, sinon à des résultats (qui étaient admis par l'examinateur), au moins à un état d'esprit peu conforme aux nouvelles exigences. Reconnaissons aussi que les examinateurs, dans ce cas, ont su prendre en compte le degré d'étrangeté de leur sujet dans la notation finale.

Les exercices sont classés en grands chapitres, ce qui permet de les mettre plus facilement en parallèle avec la progression du cours. Ils ne sont en revanche pas classés par difficulté croissante. Tous les exercices ont été effectivement posés lors de l'oral des concours. La provenance n'a été indiquée que par les deux sigles X et ENS. En effet, en ce qui concerne les ENS, il nous manquait souvent la provenance exacte (Ulm, Lyon, Cachan ou Rennes) et, compte tenu du labyrinthe des épreuves communes, il nous a paru plus judicieux de ne pas distinguer davantage.

En ce qui concerne la solution, nous l'avons rédigée en gardant à l'esprit qu'il s'agit d'exercices d'oral et non de problèmes d'écrit. Elle est parfois assortie de commentaires composés en italique. Elle est toujours détaillée, et rédigée pour en faire apparaître les ressorts fondamentaux. Certaines annexes, en la complétant, permettent de l'éclairer.

D'autres annexes sont consacrées à l'établissement de résultats ou de notions, formellement hors du programme, mais dont la récurrence nous incités à les traiter une fois pour toutes, afin d'éviter des redites fastidieuses. Par exemple : la norme d'opérateur, les matrices symétriques positives, la décomposition polaire, l'adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien.

Un conseil pour travailler ces exercices : le faire tout au long de l'année. Résoudre un exercice est loin d'être un pensum. C'est au contraire une source de plaisir. Bien sûr, la recherche infructueuse peut être cause d'une souffrance, mais cette souffrance (toute relative !) s'évanouit dès que l'on franchit avec succès les obstacles posés par l'énoncé. Le sentiment de triomphe ressenti la première fois que l'on résout un exercice difficile ne s'oublie pas.

Une dernière idée : chercher un exercice un jour et, en cas d'insuccès, laisser passer une nuit pour se remettre au travail sur le même exercice le lendemain. En cas de nouvel insuccès seulement, consulter la solution.

Il va de soi qu'il ne faut pas hésiter à varier les niveaux de difficulté et faire régulièrement, même en visant l'X ou les ENS, des exercices provenant des Mines ou de Centrale, par exemple. On en trouve aisément des annales (ne serait-ce que dans cette même collection) mais nous ne saurions trop conseiller aux étudiants et à leurs professeurs de consulter la RMS (Revue de la filière MathématiqueS), qui publie d'une année sur l'autre un gros millier d'exercices posés aux concours l'année précédente. C'est l'occasion pour nous d'en remercier le Comité de rédaction qui, par son travail, permet à tous les élèves préparationnaires des différentes filières de bénéficier d'une précieuse source d'information à laquelle, en son absence, seuls les élèves des très grands lycées pourraient s'abreuver.

Puisque nous en sommes aux remerciements, nous ne saurions en adresser trop à ceux qui, par leur relecture et leurs conseils, ont largement contribué à améliorer cet ouvrage, dont la qualité espérée est le meilleur hommage que nous puissions rendre à l'aide qu'ils nous ont apportée : Jean-Denis Eiden, Gilles Godefroy, Romain Krust, Idriss Mazari, Frédéric Morlot, Marc Rogalski, Clément de Seguins Pazzis.

Table des matières

Avant-propos

L'ouvrage est constitué de huit chapitres qui distribuent un total de cent quarante-deux exercices répartis selon leur ressort principal : algèbre élémentaire ; algèbre linéaire et réduction ; espaces euclidiens ; suites et séries numériques, analyse élémentaire et topologie ; suites et séries de fonctions ; intégration et équations différentielles ; topologie et fonctions de plusieurs variables ; probabilités. On trouvera en fin d'ouvrage deux index : l'un est constitué des mots-clefs et des principaux résultats traités ou évoqués ; l'autre fournit une correspondance entre chaque exercice et les thèmes du programme qui n'en sont pas le ressort principal. Par exemple, un exercice consacré à la réduction des matrices peut utiliser des techniques relatives aux polynômes. Enfin, des annexes précisent certains points évoqués dans la solution ou en commentaire.

La provenance exacte de l'exercice, dans les cas des Ens, n'a pas toujours pu être déterminée. Dans ce cas, la seule mention « Ens » sera portée.

Les exercices n'ont pas de difficulté attribuée, mais il peut se faire qu'un commentaire préliminaire la fasse entrevoir. Chacun d'entre eux est constitué d'un énoncé, auquel ont été intégrées, autant que possible, les indications fournies, et d'un corrigé détaillé. Les commentaires à ce corrigé sont en italiques. Ils font état de remarques non intégrées au corrigé et tentent de replacer l'exercice dans son contexte ou, dans certains cas, d'envisager une autre méthode possible de résolution

Les notations sont en général standard. Le signe « := » exprime une égalité par définition. Le terme de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne d'une matrice M est souvent noté $M(i,j)$. Une probabilité est notée $\mathbf{P}$, une espérance $\mathbf{E}$ et une variance σ^2. On note $\{x\ ;P(x)\}$ l'ensemble des x qui vérifient la propriété P. Dans une formule quantifiée, on utilise les blancs comme séparateurs, et non les virgules (et on use bien entendu des parenthèses en cas de besoin). Dans un espace vectoriel normé, la boule fermée de centre a et de rayon r est notée $B'(a,r)$, la boule ouverte $B(a,r)$. Pour parler de la série de terme général u_n, on utilise la notation $\sum u_n$ qui ne désigne donc pas une somme. La somme de la série $\sum u_n$

sera notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ou, si la famille $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est sommable (c'est-à-dire si la série $\sum u_n$ est absolument convergente), $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$. Lorsque f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on note $\int f(x)\,\mathrm{d}\,x$ une primitive de f (fonction de x) et l'on procédera sur ce symbole comme on peut procéder sur l'intégrale $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$ (intégration par parties, par exemple) sans faire état des constantes correspondant à la valeur de a. La transposée de la matrice A est systématiquement notée A^T, à l'anglo-saxonne. Bien que moins élégante que la notation ${}^tA$, elle a le mérite d'utiliser le même mouvement de la pensée et de la main que, par exemple, les notations A^{-1} et A^*. Le pgcd positif de deux entiers relatifs n et m est noté tantôt $\mathrm{pgcd}(n, m)$, tantôt $n \wedge m$. Le gradient d'une fonction f de plusieurs variables est noté ∇f.

Chapitre 1

Algèbre générale

Exercice corrigé 1

ENS de Lyon

On munit $E := \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ de sa structure naturelle de groupe additif (addition composante par composante) et l'on note E^* l'ensemble des morphismes de groupes de E vers $\mathbb{Z}$. On pose aussi, pour $k \in \mathbb{N}$, $e_k := (\delta_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $f \in E^*$. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(e_k) = 0$. Montrer que $f = 0$.

On pourra considérer les suites du type $(p^n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution

Soit $a \in E$ et, pour p fixé dans $\mathbb{N}$, $p \geqslant 2$, $b_p := (p^n a_n \mathbf{1}_{n\leqslant p})_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout m,

$$\begin{aligned} f(b_p) &= f(0, 0, \dots, 0, p^m a_m, p^{m+1} a_{m+1}, \dots) \\ &= p^m f(0, 0, \dots, 0, a_m, p a_{m+1}, \dots) \end{aligned}$$

puisque $f\Big(\sum_{k=0}^{m-1} p^k a_k e_k\Big) = 0$. Par conséquent, $f(b_p) \in p^m\mathbb{Z}$. Donc $f(b_p)$, divisible par p^m pour tout m, est nul.

Par suite,

$$\begin{aligned} f(a) &= f(a) - f(b_p) \\ &= (1-p) f\big(0, a_1, (1+p)a_2, \dots, (1+p+\dots+p^{n-1})a_n, \dots\big) \in (p-1)\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

En appliquant cela à $p = q+1$, pour $q \geqslant 1$, on voit que $f(a)$ est divisible par tous les éléments de $\mathbb{N}^*$, donc est nul. Ainsi, $f = 0$.

On a noté E^* le **dual** *de E, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires lorsque l'on considère les structures de* $\mathbb{Z}$**-modules** *(il ne s'agit donc pas d'espaces vectoriels sur un corps K, mais de leur analogue lorsque K est remplacé par l'anneau $\mathbb{Z}$). On a montré que l'orthogonal de $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de E^* qui s'annulent sur les e_k, est réduit à $\{0\}$. On remarquera que les e_k n'engendrent pas E (auquel cas le résultat demandé aurait été évident), mais seulement l'ensemble des suites d'entiers à support fini.*

Exercice corrigé 2

ENS de Lyon

Si $n \in \mathbb{N}$, on note u_n le nombre de triplets $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ vérifiant la relation $3a + 5b + 7c = n$.

Donner un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Solution

Nous introduirons la **série génératrice** *de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, qui nous permettra des calculs commodes.*

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{np}$ converge absolument pour $x \in]-1, 1[$ et a pour somme $\dfrac{1}{1-x^p}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)} &= \Big(\sum_{a=0}^{+\infty} x^{3a}\Big)\Big(\sum_{b=0}^{+\infty} x^{5b}\Big)\Big(\sum_{c=0}^{+\infty} x^{7c}\Big)\\ &= \sum_{(a,b,c)\in\mathbb{N}^3} x^{3a+5b+7c},\end{aligned}$$

la dernière famille étant sommable, comme produit de trois familles sommables. Par le théorème de Fubini, utilisé sous forme d'associativité généralisée, en regroupant à $3a + 5b + 7c$ constant,

$$\frac{1}{(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{(a,b,c)\in\mathbb{N}^3\,;\,3a+5b+7c=n} x^{3a+5n+7c}\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n.$$

Nous allons à présent développer en série entière la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)},$$

en la décomposant (grossièrement) en éléments simples.

On peut écrire

$$\frac{1}{(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)} = \frac{1}{(1-x)^3 \prod\limits_{\omega\in A}(\omega - x)},$$

où A est l'ensemble fini formé des racines 3^{e}, 5^{e} et 7^{e} de 1 différentes de 1.

Par conséquent, la fraction rationnelle (de partie entière nulle) s'écrit

$$\frac{1}{(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)} = \frac{A}{(1-x)^3} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1-x} + \sum_{\omega\in A}\frac{D_\omega}{\omega - x}\cdot \quad (1)$$

Nous calculerons certains de ces coefficients un peu plus tard. Pour l'heure, on a, toujours pour $|x|<1$,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \ ; \ \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n \ ; \ \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)x^n,$$

grâce au théorème de dérivation d'une série entière dans l'intervalle ouvert de convergence. Il en résulte que

$$\frac{1}{(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)}$$
$$= \frac{A}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)x^n + B\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n + C\sum_{n=0}^{+\infty}x^n + \sum_{\omega\in A} D_\omega \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\omega^{n+1}}x^n.$$

On obtient finalement, grâce à l'unicité des coefficients d'une série entière,

$$u_n = \frac{A}{2}(n+2)(n+1) + B(n+1) + C + \sum_{\omega\in A}\frac{D_\omega}{\omega^{n+1}}\cdot$$

Par suite,

$$u_n = \frac{A}{2}n^2 + \big(3\frac{A}{2} + B\big)n + O(1).$$

• Pour calculer A, multiplions (1) par $(1-x)^3$. On obtient

$$\frac{1}{P(x)Q(x)R(x)} = A + T(x)$$

où $P(x) := 1 + x + x^2$, $Q(x) := 1 + \cdots + x^4$, $R(x) := 1 + \cdots + x^6$ et où T est une fraction rationnelle telle que $T(1) = 0$.

En conséquence, $A = \dfrac{1}{P(1)Q(1)R(1)} = \dfrac{1}{3\times 5\times 7} = \dfrac{1}{105}\cdot$

• L'égalité (1) s'écrit à présent

$$\frac{1}{(1-x)^3P(x)Q(x)R(x)} - \frac{1}{(1-x)^3P(1)Q(1)R(1)}$$
$$= \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1-x} + \sum_{\omega\in A}\frac{D_\omega}{x-\omega}\cdot$$